Document généré n°1 :
Chap.4 : Repère du plan, géométrie de base

Objectifs du chapitre :

Savoirs et savoir-faires :

C4.a - Savoir calculer la distance entre deux points.
C4.b - Savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
C4.c - Savoir construire le projeté orthogonal d'un point sur une droite.
C4.d - Savoir résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes : triangles, quadrilatères, cercles.
C4.e - Savoir calculer des longueurs, des angles, des aires, des volumes...
C7.1

Activité d'approche n°1

Rappel (à recopier et compléter) :

Un repère est **ort.....................** si l'axe des abscisses est p................................ à l'axe des ordonnées.
Un repère est **nor...........** si *l'unité* des l'axe des abscisses a la même l............................... que celle de l'axe des ordonnées.
Un repère est **orthono.............** s'il est *à la fois* ort......................... et nor..........

1. Calcul du milieu d'un segment.

a. Montmorillon se situe au milieu du segment formé par Clermont-Ferrand et Nantes. Quelles sont les coordonnées de Montmorillon ?

b. Berlin a pour coordonnées (21 ; 12) *(et ne se trouve pas sur la carte !)*. Colmar est situé au milieu entre Berlin et Toulouse. Quelles sont les coordonnées de Colmar ?

2. Calcul d'une distance entre deux points.

a. Déterminez, en unités du repère, la distance en ligne droite entre Limoges et Toulouse et celle entre Clermont-Ferrand et Limoges (*Indication : utiliser un théorème bien connu*). Quelle est la distance entre Clermont-Ferrand et Toulouse ?

b. En utilisant la méthode suggérée à la question précédente , déterminez la distance en ligne droite entre Berlin et Toulouse.

3. Conclusion

Proposez une méthode de calcul pour :

a. déterminer les coordonnées du milieu d'un segment d'extrémités $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

b. déterminer la distance entre deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

Fin de l'activité d'approche n°1

Cours n°1 : Repères

C4.a - Savoir calculer la distance entre deux points.
C4.b - Savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment.

Définition n°1 : Repère

Un repère est **ort.....................** si l'axe des abscisses est p................................ à l'axe des ordonnées.
Un repère est **nor...........** si *l'unité* de l'axe des abscisses a la même l............................... que celle de l'axe des ordonnées.
Un repère est **orthonormé** s'il est *à la fois* ort......................... et nor..........

Propriété n°1 : Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère orthonormé, on place deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Alors, le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :
....

Exemple n°1

Si on a $A(3;-6)$ et $B(-1;2)$, calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.

Exemple n°2

On a $A(5;-2)$ et $B(-3;4)$. Calculer les coordonnées de C de façon que B soit le milieu de $[AC]$:

Propriété n°2 : Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé, on place deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Alors on peut calculer la distance AB avec la formule :
....

Exemple n°3

$A(-5;6)$ et $B(4;-3)$ sont deux points du plan. Calculer AB.

FIN du cours n°1

Premier 'Se tester' du cours n°1 :

Savoir au hasard (bonus malus -1 à +1) :

Savoir n°44 (Calculatrice INTERDITE) :

Compléter :

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Un point M appartient à $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si il a pour coordonnées (…. ; ……..) . Autrement dit, son .... est l'................................ de son .... par ….

(Se tester du cours n°1) - Exercice n°1 Calculatrice interdite

Si on a $A(-7;4)$ et $B(7;-6)$, alors que vaut AB ? (détaillez les calculs) :

(Se tester du cours n°1) - Exercice n°2 Calculatrice interdite

Si on a $A(2;-4)$ et $B(-8;5)$, alors quelles sont les coordonnées du milieu I de $[AB]$? (détaillez les calculs)

(Se tester du cours n°1) - Exercice n°3 Calculatrice interdite

Soient $A(3;-3)$ et $B(-1;8)$. Déterminer les coordonnées de C tel que B soit le milieu de $[AC]$

Résultats du Se tester :

1er ex :
2ème ex : (#21+2*#30+#28)*(#21+2*#30+#28)+(-#22-#20)*(-#22-#20)
3ème ex : I(#23–#25;2;#26–#24;2}.
4ème ex : C(–2*#29–#27;2*#30+#28).

Deuxième 'Se tester' du cours n°1 :

Savoir au hasard (bonus malus -1 à +1) :

Savoir n°57 (Calculatrice INTERDITE) :

Comparer $(-5)^2$ et $(-5{,}00000000001)^2$.

(Se tester du cours n°1) - Exercice n°4 Calculatrice interdite

Si on a $A(-2;4)$ et $B(5;-8)$, alors que vaut AB ? (détaillez les calculs) :

(Se tester du cours n°1) - Exercice n°5 Calculatrice interdite

Si on a $A(6;-5)$ et $B(-4;7)$, alors quelles sont les coordonnées du milieu I de $[AB]$? (détaillez les calculs)

(Se tester du cours n°1) - Exercice n°6 Calculatrice interdite

Soient $A(1;-1)$ et $B(-4;2)$. Déterminer les coordonnées de C tel que B soit le milieu de $[AC]$

Résultats du Se tester :

1er ex :
2ème ex : (#21+2*#30+#28)*(#21+2*#30+#28)+(-#22-#20)*(-#22-#20)
3ème ex : I(#23–#25;2;#26–#24;2}.
4ème ex : C(–2*#29–#27;2*#30+#28).

Interrogation n°1 :

Objectif : savoir
Objectif : C4.a - Niv1 - Savoir calculer la distance entre deux points.
Objectif : C4.b - Niv1 - Savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment.

Activité d'approche n°2

Partie A :
Compléter :

→ Si un quadrilatère a ses diagonales qui ...., alors ....
→ Si un quadrilatère est un parallélogramme et a ses .... égales, alors ....
→ Si un quadrilatère est un parallélogramme et a deux c........... c......................... égaux, alors ....
→ Si un quadrilatère est un rectangle et un losange, alors ....
→ Si un triangle a deux côtés égaux, alors ....
→ Si un triangle a trois côtés égaux, alors ....
→ Si les longueurs des côtés d'un triangle vérifient l'égalité de Pythagore, alors ....

Partie B :
1. Construire un repère orthonormé (i.e. les deux axes forment un angle droit, et on a la même unité de longueur sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées).
2. Placer les points $A(4;5)$, $B(7;6)$, $C(9;3)$, et $D(6;2)$.
3. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AC]$.
4. $ABCD$ semble-t-il un parallélogramme ?
5. Démontrer la réponse à la question 4.
6. Soit $E(6{,}01;2)$. Le placer.
7. $ABCE$ est-il un parallélogramme ? Justifier.
8. Soit $F(4921;25631)$ et $G(4924;25630)$. $ABGF$ est-il un parallélogramme ? Justifier.

Fin de l'activité d'approche n°2
Activité d'approche n°3

1. On reprend les points de l'activité n°2 précédente : $A(4;5)$, $B(7,6)$, $C(9,3)$, et $D(6,2)$. Calculer la distance AB.
2. Que peut-on en déduire pour CD ? Pourquoi ?
3. Calculer AC et BD. En déduire ce que n'est _pas_ $ABCD$.
4. Calculer BC. Que peut-on en déduire ?
5. $ABCD$ peut-il être un carré ? Pourquoi ?
6. Soient deux points $G(8,3)$ et $H(5;2)$. On considère le quadrilatère $ABGH$. Quelle est sa nature exacte ? Justifier complètement, comme pour le quadrilatère $ABCD$.

Fin de l'activité d'approche n°3

Cours n°2 : Projeté orthogonal

C4.c - Niv1 - Savoir construire le projeté orthogonal d'un point sur une droite.
C4.d - Niv2 - Savoir résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes : triangles, quadrilatères, cercles.

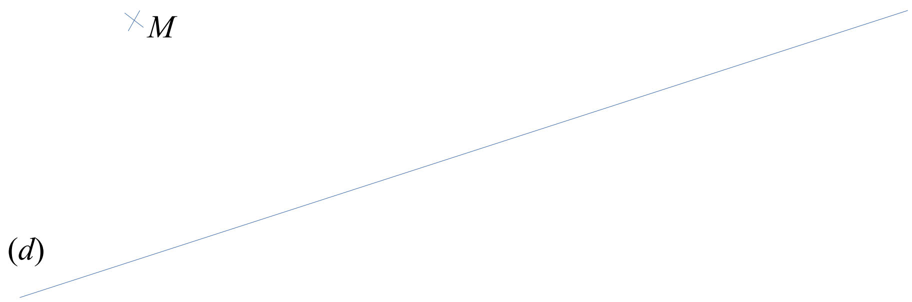
Méthode n°1 : Construction du projeté orthogonal

Pour construire le projeté orthogonal de M sur (d) :
1. À l'équerre :
- Construire la p.. à (d) passant par ......
– *Le projeté orthogonal de M sur (d) est le point .... de cette perpendiculaire avec (d)*

. Au compas :- Construire un cercle de centre M et .... (d).- Ce cercle coupe (d) en deux points. Construire deux cercles de même rayon, et de centre respectif ces deux points
- Ces deux cercles se coupent en un point M'. Tracer (MM').
– *Le projeté orthogonal de M sur (d) est le point .... de cette perpendiculaire avec (d).*

Exemple n°1

Construire le projeté orthogonal H de M sur (d) :



Propriété n°1

1. Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en un même milieu, alors ....
2. Si un quadrilatère est un parallélogramme et a ses diagonales égales, alors ....
3. Si un quadrilatère est un parallélogramme et a deux côtés consécutifs égaux, alors ....

4. Si un quadrilatère est un rectangle et un losange, alors ....
5. Si un triangle a deux côtés égaux, alors ....
6. Si un triangle a trois côtés égaux, alors ....
7. Si les longueurs des côtés d'un triangle vérifient l'égalité de Pythagore, alors ....

Exemple n°2

Soient les 4 points suivants : $O(4;6)$, $A(3;19)$, $N(-4;8)$, $W(-3;-5)$.
Quelle est la nature de ce quadrilatère ? Justifier.

FIN du cours n°2

Premier 'Se tester' du cours n°2 :

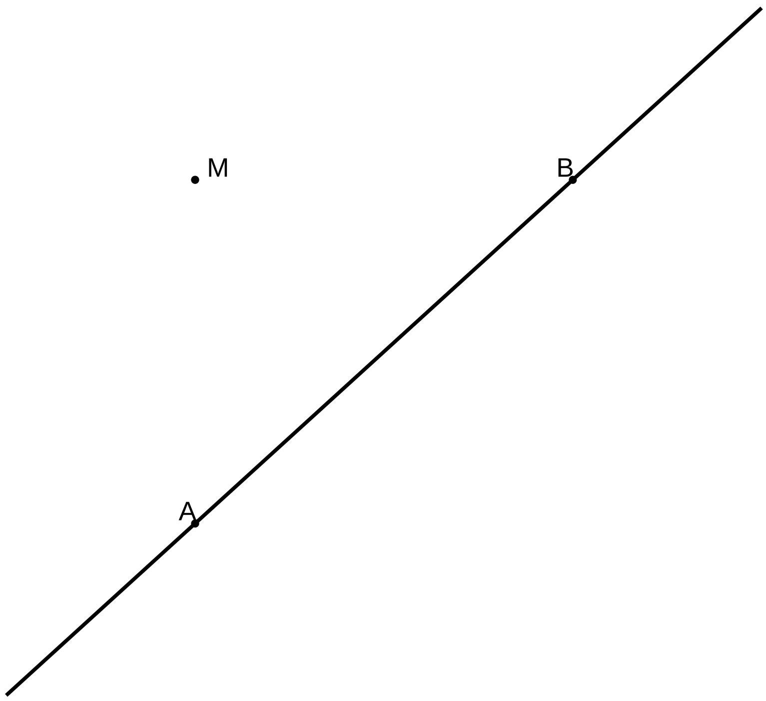
Savoir au hasard (bonus malus -1 à +1) :

Savoir n°16 (Calculatrice INTERDITE) :

Développer l'expression $B(x) = 2x(8 + 4x)$

(Se tester du cours n°2) - Exercice n°7 Calculatrice interdite

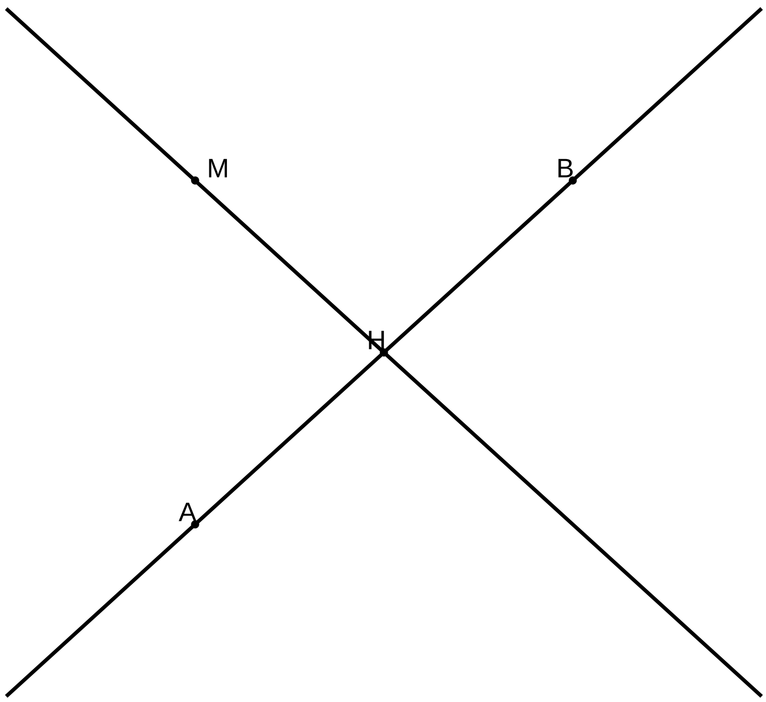
Construire le projeté orthogonale H de M sur la droite (AB) :



(Se tester du cours n°2) - Exercice n°8 Calculatrice interdite

Soient les 4 points suivants : $Q(7\,;8)$, $P(-7\,;10)$, $U(5\,;14)$, $M(-5\,;4)$. Quelle est la nature de ce quadrilatère ? Justifier.

Résultats du Se tester :



1er ex :

2ème ex : rectangle

Deuxième 'Se tester' du cours n°2 :

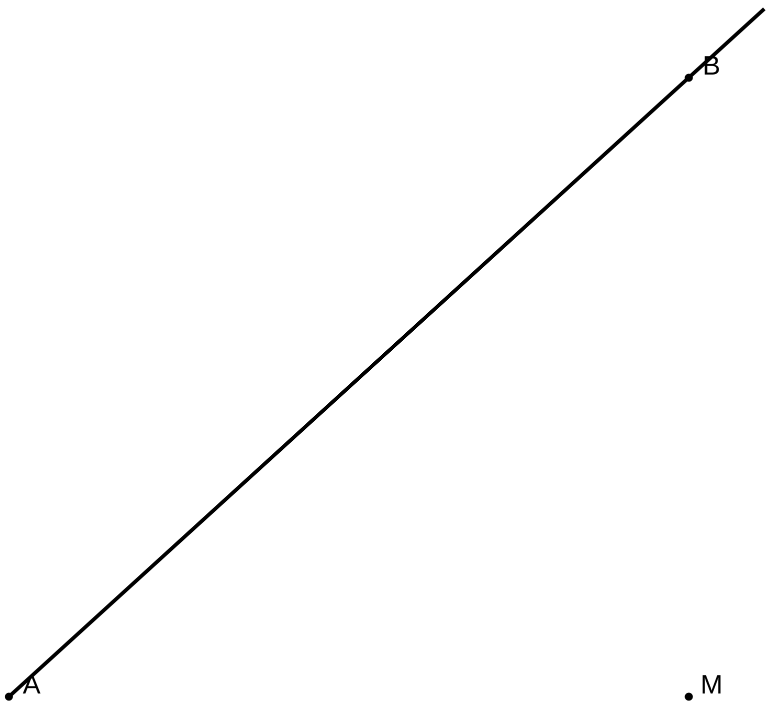
Savoir au hasard (bonus malus -1 à +1) :

Savoir n°42 (Calculatrice INTERDITE) :

Soit n un entier relatif. Soit $A = 8^n$ et $B = 8^{n+1}$. Comparer A et B..

(Se tester du cours n°2) - Exercice n°9 Calculatrice interdite

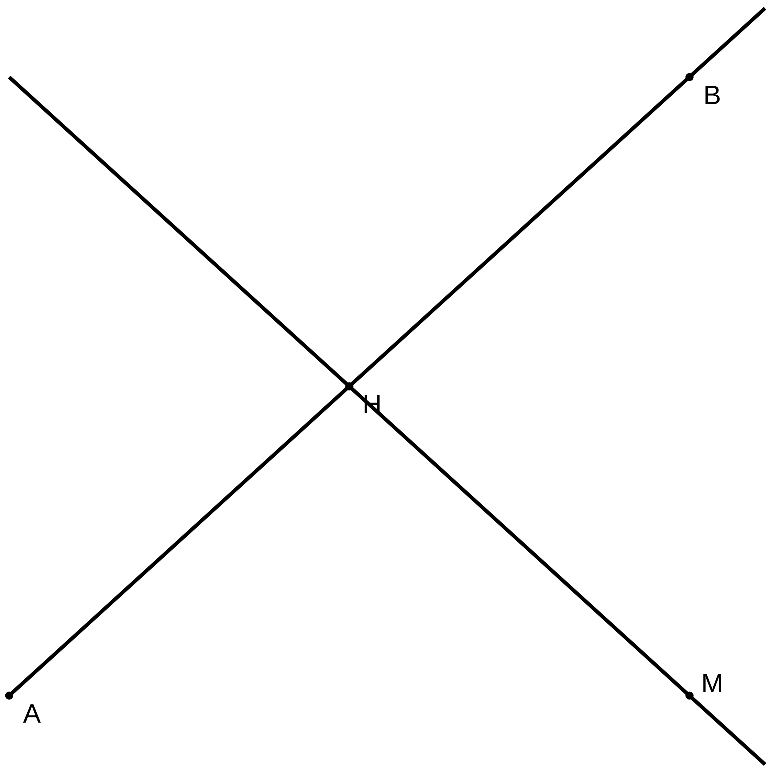
Construire le projeté orthogonale H de M sur la droite (AB) :



(Se tester du cours n°2) - Exercice n°10 Calculatrice interdite

Soient les 4 points suivants : $M(3\,;2)$, $Q(0\,;9)$, $B(1\,;4)$, $V(4\,;-3)$. Quelle est la nature de ce quadrilatère ? Justifier.

Résultats du Se tester :



1er ex :

2ème ex : parallélogramme

Interrogation n° 2 :

Objectif : savoir
Objectif : C4.c - Niv1 - Savoir construire le projeté orthogonal d'un point sur une droite.
Objectif : C4.d - Niv2 - Savoir résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes : triangles, quadrilatères, cercles.

Exercices du cours n°2

(Cours n°2) - Exercice n°11

Dans un repère, on donne les points $A(-3;-6)$ et $B(4;-7)$.
On veut que J ait des coordonnées de façon que B soit le milieu de $[AJ]$. Calculer les coordonnées de J, **en utilisant deux équations (comme dans le cours)** .

(Cours n°2) - Exercice n°12* Calculatrice interdite

Soient les 4 points suivants : $Z'(8;-2)$, $K'(15;-1)$, $S'(10;4)$, $L'(3;3)$.
Quelle est la nature du quadrilatère formé par ces quatre points ? Justifier.

(Cours n°2) - Exercice n°13* Calculatrice interdite

Soient les 3 points suivants : $P'(5;4)$, $D'(10;4)$, $V'\left(7.5-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0;4+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 5\right)$.
Quelle est la nature du triangle formé par ces trois points ? Justifier.

(Cours n°2) - Exercice n°14* Calculatrice interdite

Soient les 3 points suivants : $R'(4;4)$, $U'(10;4)$, $Y'(4;10)$.
a. Quelle est la nature du triangle formé par ces trois points ? Justifier.
b. Calculer le périmètre du triangle.
c. Calculer l'aire du triangle.

Résultats des exercices du cours n°2

1er ex : $J(11 ; -8)$.
2ème ex : Losange
3ème ex : Triangle équilatéral

4ème ex : **a.** Triangle rectangle isocèle. **b.** $4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$ **c.** $\frac{\sqrt{20}}{2}$.

FIN des exercices du cours n°2

Cours n°3 : tangentes, droites du triangles

C4.e - Niv1 - Savoir résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes : triangles, quadrilatères, cercles.

Dans un triangle, il existe quatre types de droites dites « remarquables » et deux cercles (les définitions ou propriétés suivantes sont à connaître, et sont admises, faute de temps pour les démontrer) :

Définition n°1 : Tangente à un cercle

La tangente en un point à un cercle de centre O est la droite passant par un point A du cercle, qui est .... au rayon [......]

Définition n°2 : Distance d'un point à une droite

La distance d'un point O à une droite (d) est la .... du segment p.. à (d) d'extrémité O et le point d'intersection avec (d).

Propriété n°1 : Tangente et distance d'un point à une droite

1. La tangente ne coupe le cercle qu'en ....
2. La tangente est la droite situé à une distance du centre du cercle égale au ....

Définition n°3 : Cercle inscrit

Le cercle .... dans un triangle est le cercle .... aux trois .... du triangle, dont le centre est à l'intérieur de ce triangle.

Définition n°4 : Cercle circonscrit

Le cercle .... dans un triangle est le cercle qui passe par les trois .... du triangle.

Définition n°5 : Hauteurs

- les ....
....
....

Propriété n°2 : Orthocentre.

Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un ....
.... appelé ....

Définition n°6 : Médianes

- les ....
....
....

Propriété n°3 : Centre de gravité.

Les trois médianes d'un triangle se coupent en un ....
.... appelé .... : c'est le point d'équilibre du triangle.

Définition n°7 : Bissectrices

- les ....
....
....

Propriété n°4 : Centre du cercle inscrit.

Les trois bissectrices d'un triangle se coupent en un ....
.... ,qui est ....

Définition n°8 : Médiatrices

- les ....
....
....

Propriété n°5 : Centre du cercle circonscrit.

Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un ....
.... ,qui est ....

Propriété n°6 : Centre du cercle circonscrit et triangle rectangle.

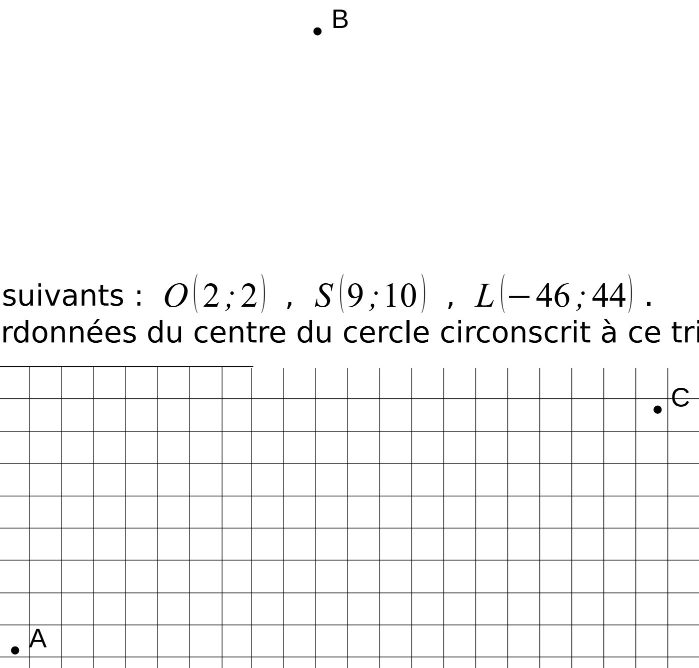
Le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est ....
....

Propriété n°7 : Triangle et centre du cercle circonscrit

Si le centre du cercle circonscrit d'un triangle est ....
.... alors ce triangle est ....
....

Exemple n°1 :

Construire l'orthocentre, le centre de gravité, le cercle inscrit et le cercle circonscrit du triangle suivant :



Exemple n°2 :

Soient les 3 points suivants : $O(2;2)$, $S(9;10)$, $L(-46;44)$.
Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Exemple n°3

Soient les 3 points suivants : $J(-7;8)$, $S(-1;0)$, $B(41;44)$.
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre le milieu de $[SB]$ que l'on nomme I, et de diamètre $[SB]$.
Montrer que la droite perpendiculaire à (IJ) passant par J est la tangente à $\mathscr{C}$ passant par J.

Fin du cours n°3

Premier ‘Se tester’ du cours n°3 :

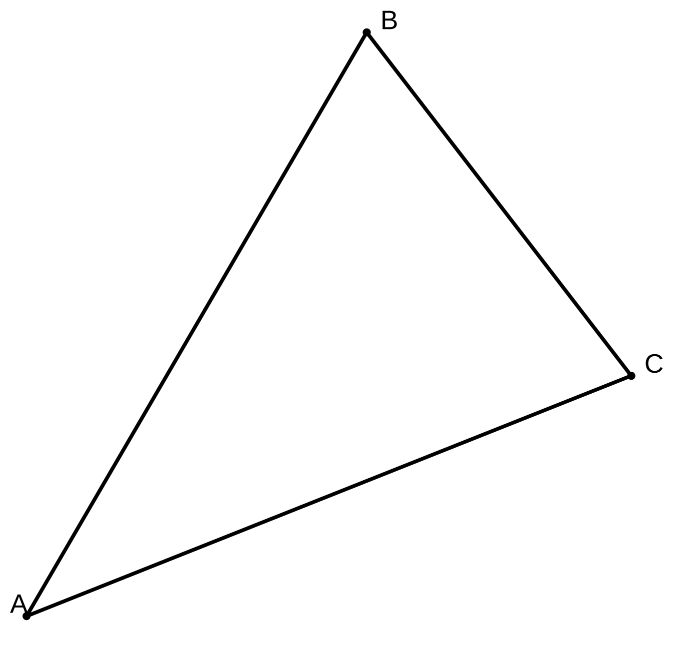
Savoir au hasard (bonus malus -1 à +1) :

Savoir n°57 (Calculatrice INTERDITE) :

Comparer $(-8)^2$ et $(-8{,}00000000001)^2$.

(Se tester du cours n°3) - Exercice n°15 Calculatrice interdite

Construire l’orthocentre H, le centre de gravité G, le cercle inscrit et le cercle circonscrit du triangle suivant :



(Se tester du cours n°3) - Exercice n°16 Calculatrice interdite

Soient les 3 points suivants : $N(6\,;8)$, $W(11\,;10)$, $T(-2\,;28)$.

Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit à ce triangle.

(Se tester du cours n°3) - Exercice n°17 Calculatrice interdite

Soient les 3 points suivants : $H(1\,;4)$, $A(9\,;11)$, $C(-48\,;60)$.

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre le milieu de $[AC]$ que l'on nomme I', et de diamètre $[AC]$.

La droite perpendiculaire à $(I'H)$ passant par H est-elle la tangente à $\mathscr{C}$ en H ? Justifier.

Résultats du Se tester :

1^er ex: Pour les définitions, voir le cours. Pour la vérification : l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle inscrit, et le centre du cercle circonscrit sont alignés.
2ème ex : Indication : démontrer d'abord que le triangle est rectangle.
3ème ex : Indication : montrer que $\#49$ appartient au cercle de diamètre $[AC]$, en prouvant que HAC est rectangle, et en utilisant une propriété du cours 3.

Deuxième 'Se tester' du cours n°3 :

Savoir au hasard (bonus malus -1 à +1) :

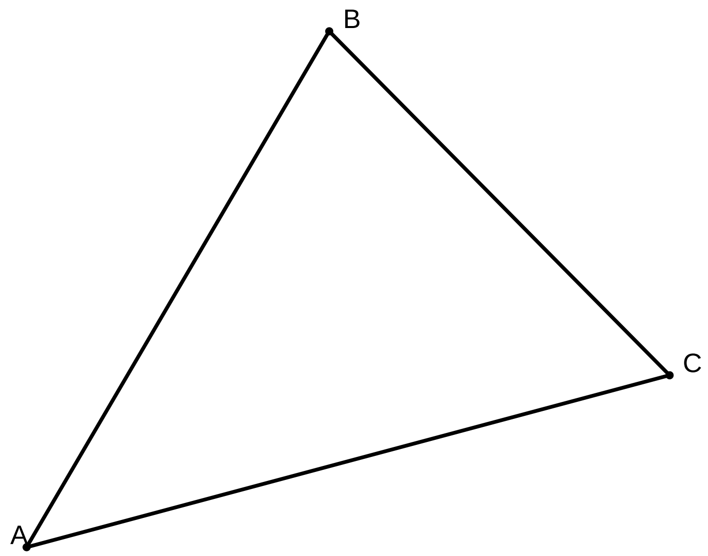
Savoir n°8 (Calculatrice INTERDITE) :

Compléter :

$\dfrac{-1}{-6}$ appartient aux ensembles de nombres :
....

(Se tester du cours n°3) - Exercice n°18 Calculatrice interdite

Construire l'orthocentre H, le centre de gravité G, le cercle inscrit et le cercle circonscrit du triangle suivant :



(Se tester du cours n°3) - Exercice n°19 Calculatrice interdite

Soient les 3 points suivants : $W(4;7)$, $B(12;11)$, $J(-4;23)$.

Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit à ce triangle.

(Se tester du cours n°3) - Exercice n°20 Calculatrice interdite

Soient les 3 points suivants : $S(8;1)$, $F(13;2)$, $K(7;6)$.

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre le milieu de $[FK]$ que l'on nomme I', et de diamètre $[FK]$
.
La droite perpendiculaire à $(I'S)$ passant par S est-elle la tangente à $\mathscr{C}$ en S ?
Justifier.

Résultats du Se tester :

1er ex: Pour les définitions, voir le cours. Pour la vérification : l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle inscrit, et le centre du cercle circonscrit sont alignés.

2ème ex : Indication : démontrer d'abord que le triangle est rectangle.

3ème ex : Indication : montrer que $\#49$ appartient au cercle de diamètre $[FK]$, en prouvant que SFK est rectangle, et en utilisant une propriété du cours 3.

Interrogation n° 3 :

Objectif : savoir

Objectif : C4.e - Niv2 - Savoir résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes : triangles, quadrilatères, cercles.

Exercices du cours n°3

(Cours n°3) - Exercice n°21***

Dans le plan muni d'un repère **orthogonal** $(O;I,J)$, on définit les unités : $OI=1$ cm, $OJ=1$ cm. Soient les 4 points suivants : $A(0;0)$, $B(5{,}5;-1{,}5)$, $C(2;3)$, $D(-3{,}5;4{,}5)$.

1. Placez les points en respectant les unités. Est-ce un losange ? Pourquoi ?

2. Sur l'axe des ordonnées, on change d'unité : $OJ'=0{,}5\ cm$. Replacer les points A,B,C et D dans ce nouveau repère. Est-ce un losange ? Pourquoi ?

3. Dans un autre repère normé $(O;I',J')$, on définit : $\widehat{I'OJ'}=45°$, $OI=0{,}5$ cm, $OJ=0{,}5$ cm. Le construire (on utilisera le compas). Soient les 4 points suivants : $A(0;0)$, $B(4;-0{,}5)$, $C(2;3)$, $D(-2;3{,}5)$. Les placer dans ce repère. Est-ce un losange ? Pourquoi ?

(Cours n°3) - Exercice n°22**

Soient les 3 points suivants : $Y(4;7)$, $D(6;11)$, $Q(-8;13)$.

1. Quelle est la nature du triangle formé par ces trois points ? Justifier.

2. Calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit à ce triangle.

3. Quelles doivent être les coordonnées d'un quatrième point pour que le quadrilatère formé soit un rectangle ? Justifier par le calcul.

(Cours n°3) - Exercice n°23*

On donne le programme de calcul suivant (un « algorithme ») :

```
DÉCLARATION DES VARIABLES
     XA EST_DU_TYPE NOMBRE
     YA EST_DU_TYPE NOMBRE
     XB EST_DU_TYPE NOMBRE
     YB EST_DU_TYPE NOMBRE
     XM EST_DU_TYPE NOMBRE
     YM EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT DE L'ALGORITHME
     AFFICHER "Entrez les coordonnées de A:"
     LIRE XA
     LIRE YA
     AFFICHER "Entrez les coordonnées de B:"
     LIRE XB
     LIRE YB
     XM PREND_LA_VALEUR (XA+XB)/2
     YM PREND_LA_VALEUR (YA+YB)/2
     AFFICHER "Les coordonnées de M sont:" & XM & " et " & YM
```

- 21 FIN DE L'ALGORITHME

1. *Faire fonctionner ce programme de calcul avec* $A(3;5)$ *et* $B(4;7)$

2. Que fait-il ?

Résultats des exercices du cours n°3

<u>1er ex</u> : **1.** Oui **2.** Non **3.** Non
<u>2ème ex</u> : **1.** Triangle rectangle. **2.** *Indications : Voir le cours : milieu de ….*
<u>3ème ex</u> : **1.** *Indication : Regarder de plus près les lignes 15 et 16.* **2.** Voir le cours.