Chapitre n°6: Nombres complexes, partie 1/2

Objectifs :

1. **Connaître la définition.** *[penser à la dimension historique pour l'introduction]*
2. **Savoir effectuer des calculs avec les nombres complexes.**
3. **Savoir résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du 2nd degré à coefficients réels.**
4. **Savoir représenter un nb complexe par un pt et un vecteur.**
[repère orthonormé]
5. **Savoir déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.**
6. **Connaitre et utiliser la relation** $z\bar{z}=|z|^2$

Activité d'approche n°1 : Pourquoi de nouveaux nombres

Histoire des sciences : Cardan.

Au XVI$^{\text{ème}}$ siècle, les mathématiciens italiens, dont Cardan, mettent au point des règles, plus ou moins connues partiellement auparavant, pour trouver des solutions d'équations de degré 3 ou 4. On donne ci-dessous la règle de Cardan pour trouver une solution de l'équation .

x^3+px=q

Vocabulaire : l'inconnue x est nommée « la chose », p est nommé le « nombre de la chose », et q est nommé le « nombre de l'équation »

$x^3+px=q$.

1. Compléter :

nombre de la chose = 24 nomb de l'éq = 56

Règle de Cardan	Exemple : $x^3+24x=56$
Le tiers du nombre de la chose, élevé au cube, étant obtenu, on y ajoute le carré de la moitié du nombre de l'équation et, du tout, on extrait la racine carrée que l'on met de côté.	$\frac{24}{3}=8 \to 8^3+\left(\frac{56}{2}\right)^2$ $=512+28^2=512+784$ $=1296 \to \sqrt{1296}=\boxed{36}$ $\sqrt{-1}\times\sqrt{121}=i\times 11$
Le demi-nombre que l'on a élevé au carré, tu ajoutes ou tu enlèves l'autre : tu as le binôme avec son apotome.	$36+28=64$ (binôme) $36-28=8$ (apotome)
En extrayant la racine cubique du binôme et celle de son apotome, le résidu de leur différence est la valeur de la racine.	$\sqrt[3]{64}=4$ et $\sqrt[3]{8}=2$ $4-2=2$ 2 est la valeur d'une racine de l'équation

$x^3-15x=4$
$-125+4$
$=-121$
$\sqrt{-121}$
$=\sqrt{-1\times 121}=i\times 11$
$11i+2$
$11i-2$
$\sqrt[3]{11i+2}=i+2$
$\sqrt[3]{11i-2}=i-2$
$(i+2)-(i-2)$
$=4$

2. Vérifier que 2 est bien solution de l'équation $x^3+24x=56$.

$2^3+24\times 2=56$

3. Appliquer la règle de Cardan à l'équation $x^3 - 36x = 91$, en vous aidant de l'exemple donné. Obtient-on bien une solution de cette équation ?

$\rightarrow \left(\frac{-36}{3}\right)^3 = (-12)^3 = -1728$

$\rightarrow \left(\frac{91}{2}\right)^2 = 2070,25$

$\rightarrow -1728 + 2070,25 = 342,25$

$\rightarrow \sqrt{342,25} = 18,5$

$18,5 + 45,5 = 64$ et $18,5 - 45,5 = -27$

$\sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt[3]{-27} = -3$ $4 - (-3) = 7$

Vérif : $7^3 - 36 \times 7 = 91$.

4. Appliquer la règle de Cardan à $x^3 - 6x = 6$. Donner une valeur approchée de la solution obtenue et contrôler ce résultat graphiquement.

$\left(-\frac{6}{3}\right)^3 = -8$ $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ $\rightarrow -8 + 9 = 1 \rightarrow \sqrt{1} = 1$

$1 + \frac{6}{2} = 4$ et $1 - \frac{6}{2} = -2$

$\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{1/3}$

$4^{1/3} - (-2)^{1/3}$ ⚠ $a^x - b^x \neq (a-b)^x$

$\simeq 2,85$

5. L'équation cruciale

Soit (E) : $x^3 - 15x = 4$.

a. Conjecturer une solution entière de (E). Vérifier par le calcul qu'il s'agit bien d'une solution de (E).

$4^3 - 15 \times 4 = 64 - 60 = 4$ ok

b. Commencer à appliquer la règle de cardan. Que se passe-t-il ?

$x^3 - 15x = 4$. $\left(-\frac{15}{3}\right)^3 = -125$ $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$

$-125 + 4 = -121$

$\sqrt{-121} = ?$

Histoire des sciences : l'audace de Bombelli

Ce mathématicien décide de poursuivre les calculs malgré tout… $\sqrt{121}=11$ donc « $\sqrt{-121}$ » serait égal à « $11\sqrt{-1}$ » même si ceci n'existe pas ! Grâce à cette audace, Bombelli réussit à prouver que 4 est bien solution de (E) (la démonstration sera effectuée plus loin).

$\sqrt{-1}$ n'ayant pas de sens, on utilisera à la place le symbole i, inventé par Euler au XVIII[ème] siècle.

Ces nouveaux nombres sont appelés nombres imaginaires.

$\sqrt{-121} = \sqrt{121} \times \sqrt{-1}$
$= 11i$

$a + ib$

6. Calculer avec des nombres imaginaires

On calcule comme avec les réels en remplaçant $\boxed{i^2}$ par $\boxed{-1}$ dès qu'il se présente :

Exemple n°1 : $2 + 3i + 4 + i = 6 + 4i$.

Exemple n°2 : $i(2 + 3i) = 2i - 3$

a. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$-2i \times (-2)$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$\to b = -2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$\to b = 2$

ℂ

a. Calculer : $4 + i - 5 + 3i = 4 - 5 + i + 3i = -1 + 4i$

b. Calculer : $2 + 4i - (1 + 3i) = 2 + 4i - 1 - 3i = 1 + i$

c. Calculer : $(2 + i)(3 - i) = 6 - 2i + i \times 3 + i \times (-i)$
$= 6 - 2i + 3i - i^2 = 6 + i - (-1) = 7 + i$

d. Calculer : $(-2 - 2i)(3 + 4i) = -6 - 8i - 6i - 8i^2$
$= -6 - 14i - 8 \times (-1) = 2 - 14i$

e. Calculer : $(i + 2)^2 = i^2 + 4i + 4 = -1 + 4i + 4 = 3 + 4i$.

f. Calculer : $(i + 2)^3 = (i+2)^2(i+2) = [3 + 4i](i+2)$
$= 3i + 4i^2 + 6 + 8i = 11i - 4 + 6 = 11i + 2$

e. Calculer : $(\underset{a}{i} - \underset{b}{2})^2 = i^2 - 4i + 4 = -1 - 4i + 4 = 3 - 4i$
$2 \times a \times b = 2 \times i \times (-2) = -4i$

f. Calculer : $(i - 2)^3 = (i-2)^2(i-2) = (3 - 4i)(i-2)$
$= 3i - 4i^2 - 6 + 8i = 11i + 4 - 6 = 11i - 2$

g. Déduire des résultats précédents $\sqrt[3]{11i+2}$ et $\sqrt[3]{11i-2}$.
$(i+2)^3 = 11i + 2$, donc $\sqrt[3]{11i+2} = i + 2$.
$(i-2)^3 = 11i - 2$, donc $\sqrt[3]{11i-2} = i - 2$.

h. Résoudre l'équation $x^2 = -1$

$x^2 = i^2$
$-i^2$ $-i^2$
$x^2 - i^2 = 0$
$(x - i)(x + i) = 0$
Donc $x - i = 0$ ou $x + i = 0$
Donc $x = i$ ou $x = -i$
Donc les solutions de cette équation sont i et $-i$.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

7. En utilisant i, poursuivre la résolution de $x^3 - 15x = 4$ initiée à la question **5b.**

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Cours n°1

Chapitre n°6: Nombres complexes, partie 1/2

I) Nombres complexes : forme algébrique.

Propriété n°1 (admise)

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, et qui possède les propriétés suivantes :

a. Cet ensemble contient …tous les nombres réels…

b. L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ se prolongent dans $\mathbb{C}$ et les règles de calculs restent les mêmes.

c. $\mathbb{C}$ contient un nombre complexe, noté i, et tel que $i^2 = -1$

d. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme …$a + ib$…, a et b étant des nombres réels.

Démonstration du a:

Les nombres de la forme $a+0i$ sont réels.

Vocabulaire

Si un nombre complexe s'écrit …$z = a + ib$…, alors :

…$a + ib$… s'appelle la **forme algébrique** de z.

b. a est la partie réelle de z. On la note $\mathcal{R}e(z)$. C'est un nombre réel.

c. b est la partie imaginaire de z. On la note $\mathcal{I}m(z)$. C'est un nombre réel.

d. Si $a = 0$, $z = ib$ et z est dit **imaginaire pur**.

e. Si $b = 0$, $z = a$ et z est un nombre réel.

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$-2 = -1 \times 2$

Exemple n°1

Si $z = 1 - 2i$, $\mathcal{R}e(z)$= 1 et $\mathcal{I}m(z)$= −2

Si $z = \sqrt{-2}$, $\mathcal{R}e(z)$= 0 et $\mathcal{I}m(z)$= $\sqrt{2}$

Si $z = -2i$, $\mathcal{R}e(z)$= 0 et $\mathcal{I}m(z)$= −2

$\mathcal{R}e(4i - 2)$ = −2 et $\mathcal{I}m(4i - 2)$ = 4

$\sqrt{-2} = \underbrace{\sqrt{-1}}_{i} \times \sqrt{2} = i\sqrt{2}$

$= \underbrace{0}_{a} + \underbrace{\sqrt{2} \times i}_{bi}$

Exemple n°2

Pour Lundi :

- Exemple n°2
- Exemple n°3
- Ex. 1
- Ex. 2.

On sait que $z_1 = 3 - 4i$ et que $z_2 = 2 + 3i$

Calculer :

$z_1 + z_2$:

$z_1 + z_2 = 3 - 4i + 2 + 3i$
$= 5 - i$

$z_1 - z_2$:

$z_1 - z_2 = 3 - 4i - (2 + 3i) = 3 - 4i - 2 - 3i = 1 - 7i$

$z_1 \times z_2$:

$z_1 \times z_2 = (3 - 4i)(2 + 3i) = 6 + 9i - 8i - 12i^2$
$= 6 + 9i - 8i + 12 = 18 + i$

$\frac{z_1}{z_2}$: ⚠

⚠ astuce

$3i \times 3i$
$3 \times 3 \times i \times i$
$9 i^2$
-9

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 4i}{2 + 3i} = \frac{(3 - 4i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)}$

$= \frac{6 - 8i - 9i - 12}{2^2 - (3i)^2} = \frac{-6 - 17i}{4 - (-9)}$

$= \frac{-6 - 17i}{13} = \frac{1}{13}(-6 - 17i)$

$= \frac{-6}{13} - \frac{17}{13} i$.

Exemple n°3

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $5z + 1 = 4i - 2$.

$5z + 1 = 4i - 2$

$-1 \quad 5z = 4i - 3 \quad -1$

$\div 5 \quad z = \dfrac{4i-3}{5} \quad \div 5 \qquad z = \dfrac{4}{5}i - \dfrac{3}{5}$

La solution de cette équation est donc $\dfrac{4}{5}i - \dfrac{3}{5}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $5z + 1 = 4z - 2i$

$5z + 1 = 4z - 2i$

$-4z \quad z + 1 = -2i \quad -4z$

$-1 \quad z = -2i - 1 \quad -1$

La solution de cette équation est donc $-2i - 1$

Autre exemple : $(5i-3)z + 1 = 4z - 2i$

$-4z \quad (5i-3)z - 4z + 1 = -2i \quad -4z$

$(5i-3)z - 4z$

$[5i - 3 - 4]z$

$-1 \quad (5i - 7)z = -2i - 1 \quad -1$

$\div (5i-7) \quad z = \dfrac{-2i-1}{5i-7} \quad \div (5i-7)$

$z = \dfrac{(-2i-1)(5i+7)}{(5i-7)(5i+7)} = \dfrac{10-19i-7}{-25-49}$

$z = \dfrac{3-19i}{-74} = -\dfrac{3}{74} + \dfrac{19}{74}i$.

Exercice n°1

Ex.1 p.210

Exercice n°2

Ex.4. p.210

Exercice n°3

Ex.10 p.210

Exercice n°4

Ex.36 p.212

Exercice n°5

Ex.40 p.212

Exercice n°6

Ex.54 p.212

Exercice n°7

Ex.79 p.214

Correction ex.1 $\quad \alpha$ (ok pour tous)

Correction ex.2 $\quad$ 3°)

$z_3 = 3i(2+i) - 5(3i^2 + 2i)$

$= 6i - 3 - 5(-3 + 2i)$

$= 6i - 3 + 15 - 10i$

$= -4i + 12$.

$x^3 - 2x + 1 = 0$?

$(x-1)(x^2 + x - 1) = 0$

$x - 1 = 0$ ou $x^2 + x - 1 = 0$

$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$a + ib$

⚠ $\longrightarrow \dfrac{-1}{i} = \dfrac{-1 \times (-i)}{i \times (-i)} = \dfrac{i}{+1} = i$.

⚠ $3i^2 \neq (3i)^2$

Les puissances sont prioritaires sur toute opération.

$(5x)^2 \neq 5x^2 \neq 25x^2 -$

$a + b \times c^2 \qquad a + (b \times c)^2$

ex.6 (54 p. 212)

$(3+2i)x + 2iy = 3 - i$

$3x + 2ix + 2iy = 3 - i$

$3x + i(2x+2y) = 3 - i$.

Si 2 nombres complexes sont égaux, alors leurs parties réelles sont égales, et leurs parties imaginaires sont égales.

Donc $\begin{cases} 3x = 3 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ 2 + 2y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ 2y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Les réels qui conviennent sont donc 1 et $-\frac{3}{2}$

ex. 7 : (79 p. 214)

1) $2z^2 - 2z + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 4\times 5\times 2 = -36$.

$\Delta < 0$, donc les racines sont des complexes :

$z_1 = \frac{2 - i\times 6}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3i}{2}$.

$z_2 = \frac{2 + 6i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

2) $-z^2 + 2z - 5 = 0$

$\Delta = 4 - 4\times(-5)\times(-1) = -16 = (4i)^2$

$\Delta < 0$, donc les racines sont des nombres complexes :

$z_1 = \frac{-2 - 4i}{-2} = 1 + 2i$

$z_2 = \frac{-2 + 4i}{-2} = 1 - 2i$.

3) $z^2 + z - 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 1 = 5$

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

4) $3z^2 - 5z + 3 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4\times 3\times 3 = -11$.

$z_1 = \frac{5 - i\sqrt{11}}{6} = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i$

$z_2 = \frac{5 + i\sqrt{11}}{6} = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i$.

$-9 = (3i)^2$

$\sqrt{\Delta} = 3i = \sqrt{-9}$

$= \sqrt{9i^2} = \sqrt{9}\times\sqrt{i^2} = i\times\sqrt{9} = i\sqrt{9}$

ex. 8 (8 p. 210)

$z_1 = i(9+2i)$ $\overline{z_1} = \overline{i}\times\overline{(9+2i)} = -i(9-2i)$

$z_2 = 1 - 3i(1-i)$ $\overline{z_2} = 1 + 3i(1+i)$

$\frac{1+2i}{1-3i} = \frac{1+2i}{1-3i}\times\frac{1+3i}{1+3i} = \frac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$

$= \frac{1 + 2i + 6i^2 + 3i}{1+9} = \frac{-5+5i}{10}$

$= \underbrace{-\frac{5}{10}} + \underbrace{\frac{5}{10}}i$.

ex. 9 (66 p. 213)

$\overline{z_1} = \overline{\frac{3+i}{1-i}} = \frac{3-i}{1+i}$ $\overline{z_2} = \frac{-i(1-4i)^2}{2+i}$

$\overline{z_3} = \frac{1-2i}{3-2i} + \frac{1}{1-i}$

ex. 10 (81 p. 214)

1) ... 2) ... 3) $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$ (E)

On pose $Z = z^2$. Alors (E) devient :

$Z^2 - 3Z - 4 = 0$ (E)

-1 est une racine évidente : $(-1)^2 - 3\times(-1) - 4$

$1 + 3 - 4 = 0$

Donc (E) devient $(Z+1)(Z-4) = 0$

Donc $z=-1$ ou $z=4$.
$z^2=-1$ ou $z^2=4$
$z=\sqrt{-1}$ ou $z=-\sqrt{-1}$ ou $z=2$ ou $z=-2$
$z=i$ ou $z=-i$ ou ...

Cours n°2

II) Conjugué d'un nombre complexes

$\overline{z}$

Définition n°2

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe. On appelle ...conjugué... du nombre complexe z le nombre complexe noté $\overline{z}$ telle que $\overline{z}=$ ...$a-ib$......

Exemple n°4 :

Si $z=4-5i$, alors $\overline{z}=$ ..$4+5i$..

Propriété n°2

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
2. $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
3. $\overline{z^n}=\overline{z}^{\,n}$
4. $z\overline{z}=a^2+b^2$ ←
5. $\overline{\overline{z}}=z$
6. Si $z'\neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Démonstration :

1. $\overline{z+z'}=\overline{a+ib+a'+ib'}=\overline{a+a'+i(b+b')}=a+a'-i(b+b')$

$\overline{z}+\overline{z'}=$ ..$a-ib+a'-ib'$ $=\overline{z}+\overline{z'}$........

2. $\overline{z\times z'}=\overline{(a+ib)\times(a'+ib')}=\overline{aa'+i(ba'+ab')-bb'}$......

$\overline{z\times z'}=$ ..$aa'-bb'-i(ba'+ab')$......

$\overline{z}\times\overline{z'}=\overline{(a+ib)}\times\overline{(a'+ib')}=(a-ib)(a'-ib')=aa'-bb'-i(ab'+ba')$

$\overline{z}\times\overline{z'}=$ ...$\overline{z\times z'}$.........

Donc : ....

3. Par récurrence......... : $P(n)$: $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

Initialisation : $P(1)$ est-elle vraie ? $\overline{z^1}=\overline{z}$ donc $\overline{z^1}=\overline{z}$......
.... et $(\overline{z})^1=\overline{z}$ donc $P(1)$ est vraie.......

Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie.......
Démontrons qu'alors, dans ce cas, $P(n+1)$ est vraie :
.... $P(n+1)$: $\overline{z^{n+1}}\overset{?}{=}(\overline{z})^{n+1}$
....

$$\overline{z^{n+1}}=\overline{z^n\times z}\underset{(\text{prop. }2.2)}{=}\overline{z^n}\times\overline{z}\underset{(P(n))}{=}(\overline{z})^n\times\overline{z}=(\overline{z})^{n+1}$$

Donc, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : P(1) est vraie et P est héréditaire Donc P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4. $z\overline{z} = (a+ib)\times\overline{(a+ib)} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$

5. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a+ib$

6. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\frac{1}{z'}\times z} = \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}\times\overline{z}$.

Or $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{\frac{1}{z'}\times\frac{\overline{z'}}{\overline{z'}}} = \overline{\frac{\overline{z'}}{a'^2+b'^2}} = \frac{z'}{a'^2+b'^2}$ et $\frac{1}{\overline{z'}} = \frac{1}{\overline{z'}}\times\frac{z'}{z'} = \frac{z'}{a'^2+b'^2}$

Donc $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}\times\overline{z} = \frac{1}{\overline{z'}}\times\overline{z} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Exemple n°5

Donner la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{4+6i}{-3-4i}$:

$\frac{4+6i}{-3-4i} = \frac{4+6i}{-3-4i}\times\frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{(4+6i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)} = \frac{-12-18i+16i-24}{9+16}$

(on multiplie le dénominateur et le numérateur par le conjugué du dénominateur) $= -\frac{36}{25} - \frac{2}{25}i$

Donc $\mathcal{Re}\left(\frac{4+6i}{-3-4i}\right) = -\frac{36}{25}$ et $\mathcal{Im}\left(\frac{4+6i}{-3-4i}\right) = -\frac{2}{25}$

Exercice n°8

Ex.8 p.210

Exercice n°9

Ex.66 p.213

$\Delta = -36$ $\quad x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\sqrt{-36} = i\times 6.$
$= 6i.$
car $(6i)^2 = -36.$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Cours n°3

III) Equation du second degré à coefficients réels.

Propriété n°3

Soit $az^2+bz+c=0$ une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ avec a, b, et c trois nombres réels.

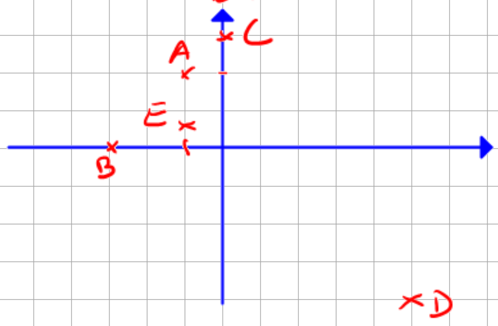
On note $\Delta=b^2-4ac$.

a. Si $\Delta>0$ l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

ex. 12 : (12 p. 210) A : $2+i$ B : $1+3i$ $\vec{OA}$: $2+i$ $\vec{AB}$: $-1+2i$.

ex. 13 :



Ex. 14 : (16 p. 210)

Module de l'affixe de :
A : 2 : il est sur le cercle de rayon 2 et de centre l'origine.

$|z_A| = 2$

$|z_B| = .$

n°15 (19 p. 211)

$$z\bar{z} = |z|^2 = a^2+b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$

$$z\bar{z} = 5^2 = 25.$$

C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.
Donc $|z_C| = 1$
$|z_D| = 1$.

n°16 (102 p. 215)

1. $|z| = 3$: la distance de O au point d'affixe z vaut toujours 3.
Ceci correspond à un cercle de centre O et de rayon 3.

2. $|z - i| = 5$: la distance de $C(0;1)$ au point d'affixe z vaut toujours 5. $\rightarrow z_C = 0 + 1\times i = i$
Ceci correspond à un cercle de centre C et de rayon 5.

3. $|z-2i| = |z+2-3i|$

$$\underbrace{|z-2i|}_{\text{tous les points situés à une distance donnée de } z_A = 2i \quad A(0;2)} = \underbrace{|z-(-2+3i)|}_{\text{tous les points situés à une distance donnée de } z_B = -2+3i \quad B(-2;3)}$$

On cherche l'ensemble des points situés à égale distance de A et B.
Il s'agit de la médiatrice de [AB].

n°17 (184 p. 227). (E) $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

1) $0^4 - 5\times 0^3 + 6\times 0^2 - 5\times 0 + 1 = 1 \neq 0$.

2) $(E')\begin{cases} u^2 - 5u + 4 = 0 \\ u = z + \frac{1}{z} \end{cases}$ $\leftarrow$ $z \neq 0$ donc $\frac{1}{z}$ existe

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 5\left(z+\frac{1}{z}\right) + 4$$
$$= z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - 5z - \frac{5}{z} + 4$$
$$= z^2 - 5z - \frac{5}{z} + \frac{1}{z^2} + 6$$

(E') est donc équivalent à : $\begin{cases} z^2 - 5z - \frac{5}{z} + \frac{1}{z^2} + 6 = 0 \\ u = z + \frac{1}{z} \end{cases}$

On multiplie la 1ère équation par z^2 : (possible car $z \neq 0$).

$$\begin{cases} z^4 - 5z^3 - 5z + 1 + 6z^2 = 0 \quad (E) \\ \left(u = z + \frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

$$\left(u^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\right.$$

3) $u^2 - 5u + 4 = 0$

$(u-1)(u-4) = 0$

Donc $u_1 = 1$ ou $u_2 = 4$.

4) $u_1 = z + \frac{1}{z}$ et $u_2 = z + \frac{1}{z}$

$1 = z + \frac{1}{z}$ et $4 = z + \frac{1}{z}$

$z \neq 0$: $z = z^2 + 1$ $\qquad$ $4z = z^2 + 1$

$z^2 - z + 1 = 0$ $\qquad$ $z^2 - 4z + 1 = 0$

$\Delta_1 = 1 - 4 = -3$

$z_{11} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_{12} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

$\Delta_2 = 16 - 4 = 12$.

$z_{21} = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

$z_{22} = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$.

$a + b \times c - d = (a) + (b) \times (c) - (d)$. $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$-12^2 \neq (-12)^2$

 → $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

b. Si $\Delta=0$ l'équation admet une unique solution $z_0 = \frac{-b}{2a}$ → (ou $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$)

c. Si $\Delta<0$, l'équation admet deux solutions **complexes distinctes** :

$z_1 = \frac{-b-\cancel{i}\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (conjugué de z_1)

→ (ou $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$)

Démonstration :

Pour les cas **a** et **b** : voir la démonstration de première.

Pour le cas **c** : la mise sous forme canonique va donner :

$$az^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Comme Δ est négatif : $az^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right)$

On factorise ensuite en utilisant l'égalité remarquable $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

Exemple n°6

Résoudre $z^2+2z+5=0$.

$\Delta = 2^2 - 4 \times 5 \times 1 = -16$

$z_1 = \frac{-2-\sqrt{-16}}{2} = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$

(ou $z_1 = \frac{-2-i\sqrt{16}}{2} = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$)

si $\Delta = -16$, $-\Delta = 16$

$z_2 = \frac{-2+\sqrt{-16}}{2} = \frac{-2+4i}{2}$

$= -1+2i$

Exercice n°10

Ex.81 p.214

Exercice n°11 (algorithme)

Ex.82 p.214

$\cos(2x) > 0$

$\cos(2x) > 0$ si

$0 + 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi$

$0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

$k=0$: $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$k=1$: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

$k=2$: je sors de $[0;2\pi]$

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
		+	0	−	0	+	0	−	

Cours n°4

IV) Représentation géométrique des nombres complexes.

Définition n°3

Soit $(O; \vec{u}\ ; \vec{v})$ un repère orthonormé (orienté dans le sens trigonométrique).
Soit $z = a+ib$ un nombre complexe.
Alors le point $M\ (a;b)$ est l'**image** du nombre complexe z, et z est l'**affixe** du point M..
Soit $\vec{w}$ un vecteur de coordonnées $(a;b)$. $z = a+ib$ est l'**affixe** de $\vec{w}$.

Exemple n°7

Soit $z_1 = -3 -4i$. Placer A , image de z_1.

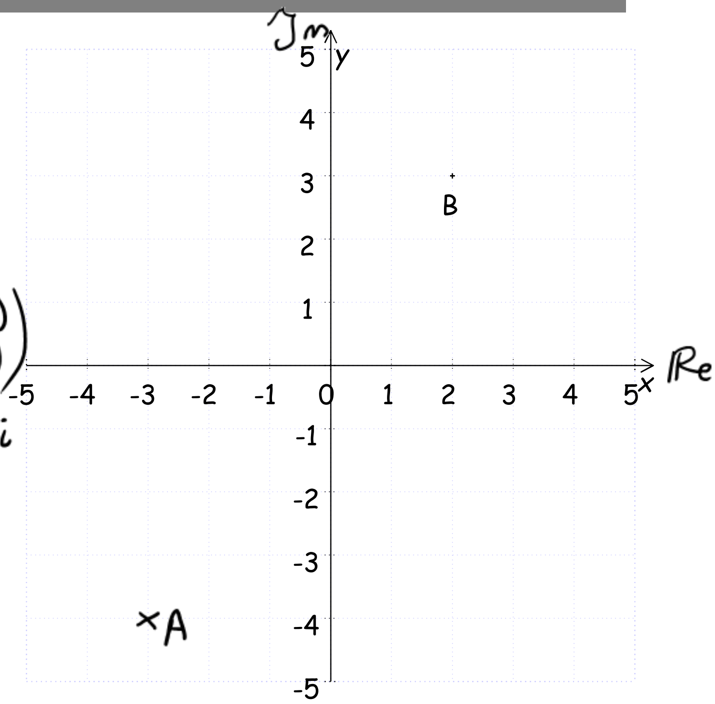
Quelle est l'affixe de B ?

$z_B = 2+3i$

Quelle est l'affixe de $\vec{AB}$?

$\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}2-(-3)\\ 3-(-4)\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\ 7\end{pmatrix}$ $z_{\vec{AB}} = 5+7i$



Pour Vendredi 11 :
ex. 12 et 13
+ exemple n°8.

Propriété n°4

1. Deux vecteurs sont égaux, si, et seulement si, ils ont même affixe.

2. Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Exemple n°8

On considère les points A,B et C d'affixes respectives :

$z_A = 1$, $z_B = 3+2i$ et $z_C = 3 - 2i$.

Sont-ils alignés ?

$z_A = 1 \longrightarrow A\ (1;0)$
$z_B = 3+2i \longrightarrow B\ (3;2)$
$z_C = 3-2i \longrightarrow C\ (3;-2)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$

$2\times(-2) - 2\times 2 \neq 0$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Donc A, B et C ne sont pas alignés.

<u>OU</u> : équation cartésienne de la droite (AB)

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \longrightarrow ax+by+c=0$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \longrightarrow +2x-2y+c=0$.

$2=-b \rightarrow b=-2$

$2=a$

$A \in (AB)$ $\quad A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$2\times 1-2\times 0+c=0 \longrightarrow$ $2-0+c=0$

$2+c=0$

$c=-2$

Donc l'équation cartésienne de (AB) est : $2x-2y-2=0$

$f(x)=0{,}0001x+3$

$C \in (AB)$?

$C(3;-2) \longrightarrow 2\times 3-2\times(-2)-2$

$= 6+4-2$

$= 8 \neq 0$.

Donc $C \notin (AB)$

Activité rapide : "Probability Distributions"

A) On lance un dé à 6 faces équilibré.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ? $\frac{1}{3}$

2) On effectue le lancer 20 fois et on considère comme succès "avoir un multiple de 3".
Quelle est la probabilité d'obtenir 5 succès ? 0,1457

B) Dériver la fonction $f(x) = (1+2x^2)\, e^{-2x+1}$

$$\binom{20}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(1-\frac{1}{3}\right)^{15}$$

On peut l'utiliser car on a :
- Un univers à 2 issues
- des événements indépendants

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$n=4$

$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$(1+2x^2)'$

$$\underbrace{(1+2x^2)}_{U(x)}\underbrace{e^{-2x+1}}_{v(x)\,=\,e^{w(x)}}$$

$U(x) = 1+2x^2$
$U'(x) = 4x$

$w(x) = -2x+1$
$w'(x) = -2$

$v(x) = e^{w(x)}$
$v'(x) = w'(x)\, e^{w(x)}$
$v'(x) = -2e^{-2x+1}$

$f'(x) = U'(x)\times v(x) + U(x)\times v'(x)$

$f'(x) = 4x\, e^{-2x+1} + (1+2x^2)\times(-2e^{-2x+1})$

$f'(x) = 4x \times e^{-2x+1} + (1+2x^2)\times(-2)\times e^{-2x+1}$

$f'(x) = e^{-2x+1} \times \underbrace{\left(4x + (-2)(1+2x^2)\right)}_{4x-4x^2-2}$

$\Delta = 16 - 4\times(-2)\times(-4) = -16$

Exercice n°12

Ex.12 p.210

Exercice n°13

Ex.13 p.210

Pour

Cours n°5

V) Module

Définition n°4

On appelle **module** d'un nombre complexe $z=a+ib$ le réel positif $|z|$ tel que $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Remarque :

Le module correspond géométriquement à une longueur.

Propriété n°5

1. $z\bar{z}=$ $|z|^2$
2. $|zz'|=$ $|z||z'|$
3. $|\bar{z}|=$ $|z|$
4. $|-z|=$ $|z|$
5. $|z^n|=$ $|z|^n$
6. $\left|\frac{z}{z'}\right|=$ $\frac{|z|}{|z'|}$

Démonstration :

$\sqrt{3^2+4^2} \neq 7$!

$z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2+b^2$

$zz'=(a+ib)(a'+ib')=aa'+ib\times ib'+iba'+iab'$

$=aa'-bb'+i(ba'+ab')$

Donc $|zz'|=\sqrt{(aa'-bb')^2+(ba'+ab')^2}$

$|z||z'|=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}$ donc $|zz'| \overset{?}{=} |z||z'|$

$|\bar{z}|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$

$|-z|=\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$

$z=a+ib$

$-z=-a-ib=(-a)+i\times(-b)$

$$|zz'| = |z||z'| \ ?$$

$$|z||z'| = \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{a'^2+b'^2}$$

$$|z||z'| = \sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}$$

$$|z||z'| = \sqrt{(aa')^2+(bb')^2+(ba')^2+(ab')^2} \quad 1$$

$$|zz'| = |(a+ib)(a'+ib')| = |aa'-bb'+i(ba')+i(ab')|$$

$$= \sqrt{(aa'-bb')^2+(ba'+ab')^2}$$

$$= \sqrt{(aa')^2+(bb')^2-2aa'bb'+(ba')^2+(ab')^2+2aa'bb'}$$

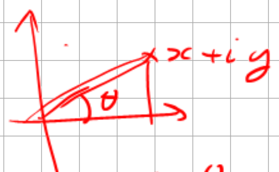
$$= \sqrt{(aa')^2+(bb')^2+(ba')^2+(ab')^2} = |z||z'|$$

$|z^n| = |z|^n$ par récurrence.

i

$e^1 = e \quad \pi$

$e^{i\pi} = -1$



$\cos\theta + i\sin\theta$

Exemple n°9

On considère les points A,B et C d'affixes respectives :

$A(1;0)$ $B(3;2)$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$z_A = 1$, $z_B = 3+2i$ et $z_C = 3-2i$.

Calculer $|z_A|$, $|z_B|$ et $|z_C|$. En déduire la nature de ABC.

$|z_A| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$ $\quad |z_B| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ $\quad |z_C| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$

Donc le triangle OBC est isocèle en O :

$z_B - z_A = 3+2i-1 = 2+2i$; $z_C - z_A = 3-2i-1 = 2-2i$

Donc $\underbrace{|z_B - z_A|}_{\sqrt{2^2+2^2}} = \underbrace{|z_C - z_A|}_{\sqrt{2^2+(-2)^2}}$ Donc le triangle ABC est isocèle en A

Remarque :

Attention : $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

Exercice n°14

Ex.16 p.210

Exercice n°15*

Ex.19 p.211

Exercice n°16*

Ex.102 p.215

Exercice n°17**

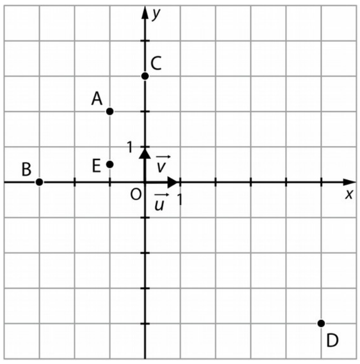
Ex.184 p.227

Résultats ou indices

Ex.1 (1 p.210) : dans le désordre : -4 et 0 ;0 et 7 ; 3 et 2 ; -1 et 1
Ex.2 (4 p.210) : dans le désordre : $-2+3i$; $10-4i$; $12-4i$
Ex.3 (10 p.210) : **1.** $2-3i$ et $\frac{1}{2}i$ **2.** 3 et i.
Ex.4 (36 p.212) : dans le désordre : $10-12i$; $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}i$;$-13-25i$; $-11+3i$
Ex.5 (40 p.212) : dans le désordre : $-1-3i$; $\frac{-5}{2}-\frac{3}{2}i$; $\frac{11}{29}-\frac{13}{29}i$; $\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$
Ex.6 (54 p.212) : $x=1$ et $y=-\frac{3}{2}$
Ex.7 (79 p.214) : **1.** $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ et $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ **2.** $1+2i$ et $1-2i$ **3.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **4.** $\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i$ et $\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i$
Ex.8 (8 p.210) : dans le désordre : $\frac{1+i}{3-2i}$; $(1+i)(-3-11i)$; $\frac{-5i}{4+i}$; $\frac{-2-3i}{5+i}$; $1+3i(1+i)$; $-i(9-2i)$
Ex.9 (66 p.213) : ~~**a.** $(1-i\bar{z})(1+2\bar{z})$. **b.** $\bar{z}^3-2i\bar{z}^2+1+3i$.~~

→ $z_1=\frac{3-i}{1+i}$; $z_2=\frac{-i(1-4i)}{2+i}$
$z_3=\frac{1-2i}{3-2i}+\frac{1}{1-i}$

Ex.10 (81 p.214) : **1.** $\sqrt{5}$,$-\sqrt{5}$,1 et -1 **2.** $2i$,$-2i$,$-i$ et i **3.** -2,2,$-i$ et i.
Ex.11 (82 p.214) : *Un test à faire sur le signe de delta...*
Ex.12 (12 p.210) : dans le désordre : $1-i$;$-1+2i$;$2+i$;$1+3i$;$3+2i$;3 ;$-2+2i$;$-2i$
Ex.13 (13 p.210) :



3. $Z=z^2$
$Z^2-3Z-4=0$
$\Delta=9+16$
$=25$
$\frac{3-5}{2}$ ...
$(Z+1)(Z-4)=0$
$z^2=-1$ ou $z^2=4$
$i,-i$ -2 et 2

→ $z^2=-4$
$\cdot\ z=\sqrt{-4}$ ou $(-\sqrt{-4})$
$=i\sqrt{4}$ ou $-i\sqrt{4}$
$=2i$ ou $-2i$

Ex.14 (16 p.210) : $|z_A|=|z_E|=2$; $|z_B|=2{,}5$; $|z_C|=|z_F|=3$; $|z_D|=|z_G|=1$
Ex.15 (19 p.211) : 25.
Ex.16 (102 p.215) : **Dans le désordre** : Médiatrice de $[AB]$ avec $A(2i)$ et $B(-2+3i)$. Cercle de centre O et de rayon 3. Cercle de centre $\Omega(i)$ et de rayon 5.
Ex.17 (184 p.227) : **3.** 1 et 4 **4.** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.