GÉOMÉTRIE

3

Produit scalaire dans l'espace et applications

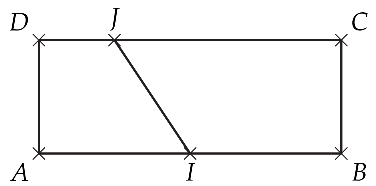
Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Calculer un produit scalaire dans le plan en utilisant ses différentes expressions
- Calculer la mesure d'un angle géométrique, une longueur
- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

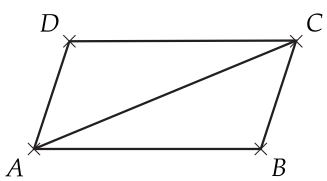
1 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 1,5$. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $4\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC}$.



Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI}$
3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI}$
4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI}$

2 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 2$ et $AC = 5$.



1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

2) a) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$, au dixième de degré près.

b) En remarquant que $BD^2 = \overrightarrow{BD}^2$, en déduire que $BD = \sqrt{15}$.

3 On considère un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace.

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite donnée.

a) (d_1) est la droite passant par le point $A(4\,;-5\,;2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$.

b) (d_2) est la droite passant par les points $B(-1\,;3\,;-2)$ et $C(4\,;3\,;2)$.

2) Soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3-5t \\ y = t \\ z = -1+4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer si les points suivants appartiennent à la droite (d) :

a) $D\left(-\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{5}{3}\right)$ b) $E(-1\,;2\,;5)$

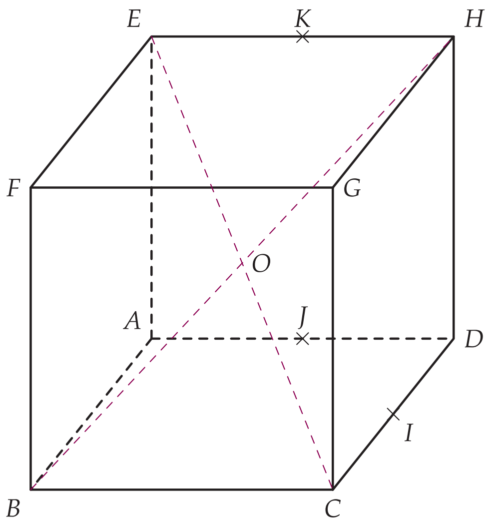
Voir solutions p. 33

Activités d'approche

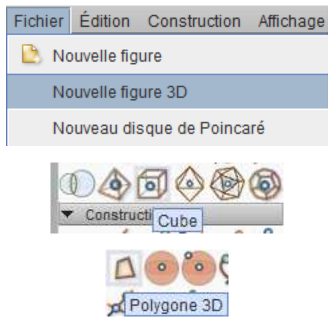
ACTIVITÉ 1 Produit scalaire dans l'espace... ou dans un plan ?

INFO

Considérons un cube $ABCDEFGH$ d'arête 2. On note O le centre de ce cube ainsi que I, J et K les milieux respectifs des arêtes $[CD]$, $[AD]$ et $[EH]$.



On pourra s'appuyer sur le logiciel de géométrie dynamique CaRMetal (version 4) pour modifier l'angle de vue (clic droit / glisser) afin d'avoir un meilleur aperçu des vecteurs et plans de la figure.



Dans chacun des cas suivants :

1) mettre en évidence un plan contenant des représentants des vecteurs donnés ;

2) calculer leur produit scalaire dans ce plan.

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BH}$
c) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$
d) $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OH}$
e) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AG}$
f) $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{AK}$
g) $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OH}$
h) $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{FH}$
i) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BK}$

DÉBAT 2 Un calcul toujours possible ?

1) On considère le même cube que dans l'activité 1.
Le produit scalaire $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{AG}$ est-il calculable ? Expliquer pourquoi.

2) Plus généralement, le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace existe-t-il toujours ?

ACTIVITÉ 3 Caractérisation normale d'un plan

Partie 1 : En théorie

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace, on considère un plan $(\mathscr{P})$ passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul, simultanément orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1) Démontrer que $\vec{n}$ est aussi orthogonal à tout vecteur $\vec{w}$ de $(\mathscr{P})$.

2) En déduire que si M est un point de $(\mathscr{P})$, alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

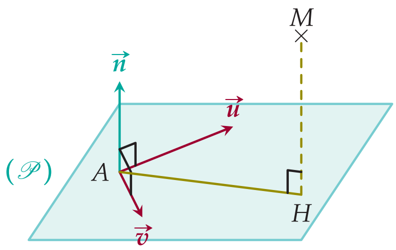
3) Démontrons maintenant la réciproque.

a) Énoncer cette réciproque.

b) Soit M un point de l'espace.

On considère le point H, projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathscr{P})$.

Démontrer, en calculant $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}$, que si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, alors $HM = 0$ puis en déduire que $M \in (\mathscr{P})$.



4) Énoncer la propriété démontrée.

Partie 2 : En pratique

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan $(\mathscr{P})$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 2s + t \\ y = -1 + s + 2t \\ z = -s + 4t \end{cases},\ s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

1) Donner les coordonnées d'un point A appartenant à $(\mathscr{P})$ ainsi que celles de deux vecteurs directeurs de $(\mathscr{P})$, que l'on notera $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) On cherche les coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'un vecteur $\vec{n}$ qui soit orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

a) Démontrer que les réels a, b et c satisfont le système suivant, que l'on note $(\mathscr{S})$:

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{cases}$$

b) Démontrer les équivalences suivantes :

$$(\mathscr{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ -2a - 4b - 8c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ -3b - 9c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = -3c \end{cases}$$

c) En déduire la forme générale du vecteur $\vec{n}$, pour $c \in \mathbb{R}^*$ puis, en choisissant judicieusement une valeur de c, donner un vecteur $\vec{n}$ particulier.

ACTIVITÉ 4 Équation cartésienne

INFO

En Première S, on a démontré que dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ du plan, une droite est caractérisée par une équation du type $ax + by + c = 0$, où a et b ne sont pas simultanément nuls.

On a ensuite vu, au chapitre **G2**, qu'une droite de l'espace n'est plus du tout caractérisée de la même façon puisqu'elle est caractérisée dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une représentation paramétrique du type :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

où α, β et γ ne sont pas simultanément nuls et x_A, y_A et z_A sont les coordonnées d'un point de la droite.

Activités d'approche

On peut alors légitimement se poser la question suivante : « Que caractérise une équation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non tous nuls ? »

Partie 1 : Expérimentation

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et on considère l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que :

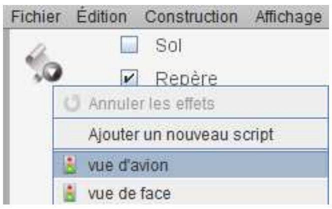
$$2x - 3y + z - 1 = 0.$$

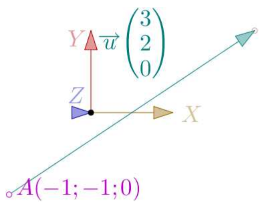
1) On se place dans le plan d'équation $z = 0$.

a) Quel est le plan dans lequel tous les points ont une cote nulle ?

b) Dans ce plan, décrire le plus précisément possible l'ensemble de points que représente l'équation $2x - 3y - 1 = 0$.

c) Avec un logiciel de géométrie dynamique (par exemple : CaRMetal, version 4, dans une « Nouvelle figure 3D », en « vue d'avion »), représenter cet ensemble de points.
(Pour créer un objet, on utilise l'outil approprié sur un espace vierge de la figure puis clic droit sur cet objet pour lui affecter les coordonnées désirées.)





2) Adopter la démarche de la question **1)** :

a) dans le plan d'équation $y = 0$, en « vue de gauche » ;

b) dans le plan d'équation $x = 0$, en « vue de face ».

3) Que semblent définir ces trois droites ? Trois droites étaient-elles nécessaires ? Combien de droites suffisaient ?

4) Si on procède par analogie avec les équations de droites dans le plan, que pourrait représenter le vecteur ayant pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$?
Représenter ce vecteur afin de donner du poids à cette conjecture.

Partie 2 : Démonstration

Soient $A(-1\,;-1\,;0)$, $B(1\,;0\,;-1)$ et $C(0\,;1\,;4)$ trois points appartenant à $(\mathscr{E})$.
On note $(\mathscr{P})$ le plan passant par A et dirigé par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

1) a) Donner une représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$.

b) En déduire que si $M \in (\mathscr{P})$, alors $M \in (\mathscr{E})$.

2) Démontrons maintenant la réciproque.

a) Énoncer cette réciproque. (Pour les questions suivantes, on se placera sous les hypothèses données dans cette réciproque.)

b) Expliquer pourquoi l'on peut écrire que :

$$2x - 3y + z - 1 = 2 \times (-1) - 3 \times (-1) + 0 - 1.$$

c) Déterminer les coordonnées d'un vecteur non nul $\vec{n}$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

d) Conclure.

1. Produit scalaire dans l'espace

Remarque : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont nécessairement coplanaires :

- s'ils sont colinéaires, alors il existe une infinité de plans contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- s'ils ne sont pas colinéaires, ramenons-les à une même origine A et considérons le plan engendré par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui contient donc, par construction, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

DÉFINITION

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Remarque : La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

PROPRIÉTÉ : Orthogonalité

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

PREUVE Étant donné la colinéarité de tous les vecteurs directeurs d'une même droite, il suffit de démontrer la propriété en choisissant un vecteur directeur par droite.
Soient (d_1) et (d_2) deux droites, dirigées respectivement par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Considérons (Δ_1) et (Δ_2), les parallèles respectives à (d_1) et (d_2) passant par un même point ; elles sont aussi dirigées respectivement par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
(d_1) est orthogonale à (d_2) si, par définition, (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires c'est-à-dire si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux.

DÉFINITION : Repère orthonormé

Un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormé si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.

PROPRIÉTÉ : Expression analytique du produit scalaire

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

PREUVE Voir exercice 87 p. 23.

Cours - Méthodes

Exemple Dans un repère orthonormé, soient (d_1) et (d_2) deux droites de représentations paramétriques $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = -5-7t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 5-t \\ y = -1+4t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Les vecteurs $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui dirigent (d_1) et (d_2)m sont orthogonaux puisque $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -1+8-7 = 0$. Ainsi, (d_1) et (d_2) sont orthogonales.

MÉTHODE 1 Calculer la mesure d'un angle

► Ex. 17 p. 15

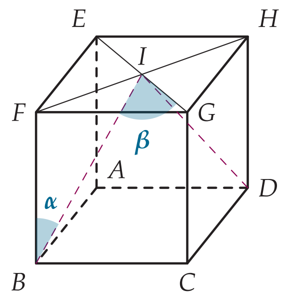
Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

Exercice d'application Soit $ABCDEFGH$, un cube de côté 1 et I le centre de la face $EFGH$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Déterminer, au degré près, les mesures des angles :

1) $\alpha = \widehat{IBF}$ 2) $\beta = \widehat{BID}$



Correction

1) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BF}$ car $\overrightarrow{BF}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BI}$ sur (BF). Ainsi, $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BF} = 1$.

D'autre part, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BI} = BF \times BI \times \cos(\alpha) = BI \times \cos(\alpha)$.

De plus, $B(1\,;0\,;0)$ et $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ donc $BI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ainsi, $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \cos(\alpha) = 1$ et donc $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}}$. On en déduit alors que $\alpha \approx 35°$.

2) $\overrightarrow{IB} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ID} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = -0,25 - 0,25 + 1 = 0,5 = \frac{1}{2}$.

D'autre part, $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = IB \times ID \times \cos(\beta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} \times \cos(\beta) = \frac{3}{2}\cos(\beta)$. Par conséquent, $\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cos(\beta)$, et donc $\cos(\beta) = \frac{1}{3}$. On en déduit alors que $\beta \approx 71°$.

PROPRIÉTÉ : Propriétés algébriques

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel. Alors :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ $\quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

REMARQUE : Seul le premier point recquiert réellement une démonstration. En effet, ce produit scalaire fait intervenir trois vecteurs et ne peut donc pas, dans le cas général, être considéré dans un seul et même plan.

PREUVE

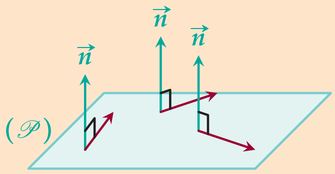
- Pour le premier point, on exprime analytiquement le membre de gauche et le membre de droite puis on compare les expressions obtenues.
- Pour les trois derniers points, on se place dans le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, où l'on utilise les propriétés établies dans le plan en Première S. Plus particulièrement l'avant-dernier point provient des formules avec les carrés scalaires.

Exemple On se place dans le cube $ABCDEFGH$ comme décrit dans la méthode précédente.
$\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HD}\right) = \left(\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}\right)\cdot\left(\overrightarrow{FB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}\right) = \overrightarrow{FB}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{HF}^2.$
Comme $FB=1$ et que $HF=\sqrt{2}$, on en déduit que $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}=1-\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$.

2. Vecteur normal à un plan

DÉFINITION : Vecteur normal

Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à un plan $(\mathscr{P})$ s'il est non nul et orthogonal à tous les vecteurs contenus dans $(\mathscr{P})$.



PROPRIÉTÉ

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal du plan.

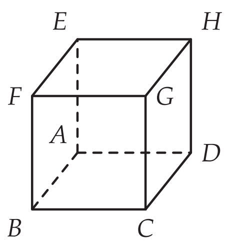
PREUVE Soient (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan.
Par définition, (d) est orthogonale à $(\mathscr{P})$ si et seulement si (d) est orthogonale à toute droite de $(\mathscr{P})$. Cela signifie que $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur contenu dans $(\mathscr{P})$, autrement dit, que $\vec{u}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.

PROPRIÉTÉ

Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan alors c'est un vecteur normal à ce plan.

PREUVE Soient $(\mathscr{P})$ un plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de ce plan auxquels est orthogonal un vecteur non nul $\vec{n}$. Montrons que $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathscr{P})$.
Ramenons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à une même origine A : $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est alors un repère de $\mathscr{P}$ et tout vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, où α et β sont deux réels. Ainsi, $\vec{w}\cdot\vec{n}=\alpha\vec{u}\cdot\vec{n}+\beta\vec{v}\cdot\vec{n}=0$.

Exemple Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête $a>0$.
Les faces $ABFE$ et $BCGF$ étant des carrés, le vecteur $\overrightarrow{FB}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Ainsi, $\overrightarrow{FB}$ est un vecteur normal au plan (ABC). On peut aussi dire que la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC).



Exemple Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1\,;1\,;1)$ et $B(-2\,;0\,;2)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

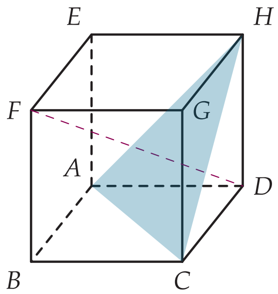
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc on peut définir le plan $\mathscr{P}$ engendré par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

De plus, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

MÉTHODE 2 Démontrer une orthogonalité

▶ Ex. 29 p. 17

Exercice d'application Soit $ABCDEFGH$, un cube d'arête 1.
Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (ACH).



Correction Il suffit de prouver que $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACH), par exemple $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HC}$. Démontrer alors que $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{HC}=0$.
Calculons le premier produit scalaire en utilisant les propriétés algébriques et le second analytiquement :

- $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$.
  D'une part, et d'après l'exemple précédent, $\overrightarrow{FB}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc il est orthogonal à tout vecteur à ce plan, en particulier à $\overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
  D'autre part, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ car $[BD]$ et $[AC]$ sont les diagonales du carré $ABCD$.
  On en conclut que $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
- En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a $C(1\,;1\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $F(1\,;0\,;1)$ et $H(0\,;1\,;1)$ et ainsi, $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.
  Par conséquent, $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{HC}=1+0-1=0$.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $(\mathscr{P})$. Alors, tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.

PREUVE Soit $\vec{m}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$, c'est-à-dire tel que $\vec{m}=k\vec{n}$, $k\in\mathbb{R}^*$.
Montrons que $\vec{m}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathscr{P})$.
Soit $\vec{w}$ un vecteur de $\mathscr{P}$. Alors $\vec{w}\cdot\vec{m}=\vec{w}\cdot(k\vec{n})=k(\vec{w}\cdot\vec{n})=0$.

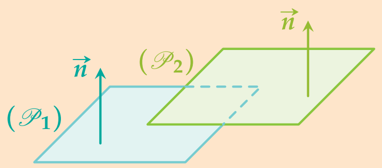
DÉFINITION : Projection orthogonale

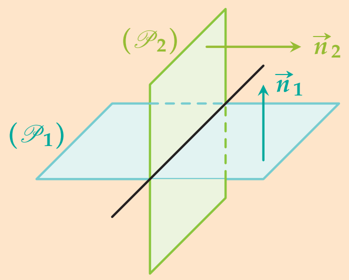
La projection orthogonale d'un point A sur un plan $(\mathscr{P})$ est le point H appartenant à $(\mathscr{P})$ tel que (AH) soit orhtogonale à $(\mathscr{P})$ ou, autrement dit, que $\overrightarrow{AH}$ soit un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Exemple En reprenant la configuration de la méthode précédente, considérons I le centre de gravité de ACH. Alors $\overrightarrow{HI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HM}$, où M est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{HI}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{HD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)$.
Ainsi $\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{FH}+\frac{2}{3}\overrightarrow{HD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{FD}$. $\overrightarrow{FI}$ est donc aussi un vecteur normal à (ACH) et comme $I\in(ACH)$, on en déduit que I est le projeté orthogonal de F sur (ACH).

PROPRIÉTÉ

- Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.





PREUVE Admise.

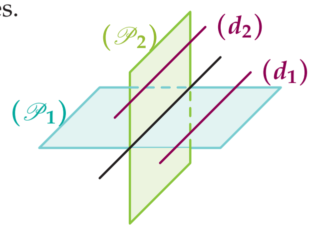
Exemple On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

- Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

  $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires : les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont donc parallèles.
- Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

  $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires : les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont donc sécants, mais $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$ donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ne sont pas perpendiculaires.

Remarque : Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$, deux plans perpendiculaires. Si (d_1) est une droite de $(\mathscr{P}_1)$ et (d_2) est une droite de $(\mathscr{P}_2)$, alors (d_1) et (d_2) ne sont pas nécessairement orthogonales.
Ci-contre, deux droites (d_1) et (d_2) parallèles.
Voir exercice 32 p. 17.



PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{n}$ un vecteur non nul, A un point et $(\mathscr{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Alors un point M appartient à $(\mathscr{P})$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

PREUVE

- Si M appartient à $(\mathscr{P})$ alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de $(\mathscr{P})$ et est donc orthogonal à $\vec{n}$.
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Considérons H le projeté orthogonal de M sur $(\mathscr{P})$. Alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}$.
  D'une part, $\overrightarrow{AH}$ est contenu dans $(\mathscr{P})$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux et ainsi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.
  D'autre part, $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = \|\vec{n}\| \times HM$ ou $-\|\vec{n}\| \times HM$.
  On en déduit donc que $\|\vec{n}\| \times HM = 0$ et ainsi, puisque $\vec{n} \neq \vec{0}$, $HM = 0$: le point M est confondu avec le point H, il appartient donc à $(\mathscr{P})$.

3. Équation cartésienne d'un plan

PROPRIÉTÉ : Caractérisation algébrique d'un plan

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

- Si M appartient à un plan $(\mathscr{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :
$$ax + by + cz + d = 0,$$
avec a, b et c des réels non simultanément nuls.
- Réciproquement :
Si les coordonnées de M vérifient une relation du type $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b et c non simultanément nuls, alors M appartient à un plan $(\mathscr{P})$.

On dit que $(\mathscr{P})$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

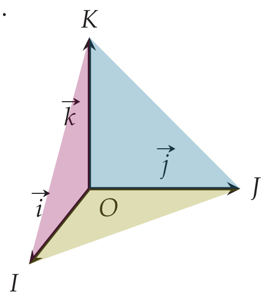
PREUVE

- Soit $(\mathscr{P})$ un plan passant par un point $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
M appartenant à $(\mathscr{P})$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire analytiquement :
$$(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + (z - z_0)\gamma = 0$$
ou encore, en développant :
$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0 = 0.$$
Cette dernière égalité est bien de la forme annoncée en posant $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ et $d = -\alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0$.
- a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$:
  - si $a \neq 0$, alors le triplet $\left(-\dfrac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ vérifie l'égalité $ax + by + cz + d = 0$;
  - si $a = 0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

  Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :
$$ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$
ce qui peut aussi s'écrire : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.
Cette dernière égalité n'étant rien d'autre que la traduction analytique de l'orthogonalité entre les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on en déduit, d'après la propriété précédente, que M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

- Le plan (OJK) a pour équation $x = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{i}$.
- Le plan (OIK) a pour équation $y = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{j}$.
- Le plan (OIJ) a pour équation $z = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{k}$.



MÉTHODE 3 Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier)

► Ex. 38 p. 18

Dans le cas où le plan $(\mathscr{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1) écrire l'équation de $(\mathscr{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2) déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Exercice d'application Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(1\,;-2\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction Les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ étant définies, le plan $(\mathscr{P})$ admet pour équation $4x - 2y + z + d = 0$, où d est un réel qu'il reste à déterminer. Le point A appartient à $(\mathscr{P})$ donc $4 \times 1 - 2 \times (-2) + 3 + d = 0$, ce qui donne $d = -11$.
Ainsi, une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est : $4x - 2y + z - 11 = 0$.

MÉTHODE 4 Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général)

► Ex. 49 p. 19

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathscr{P})$:

1) s'assurer que le plan $(\mathscr{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
2) déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $(\mathscr{P})$;
3) en déduire une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ en se référant à la méthode précédente.

Exercice d'application Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0\,;1\,;1)$, $B(-4\,;2\,;3)$ et $C(4\,;-1\,;1)$.
Déterminer, s'il existe, une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ défini par ces trois points.

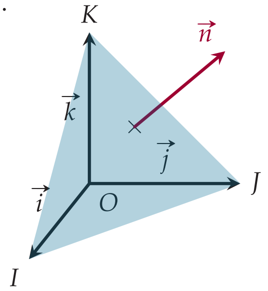
Correction On commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan $(\mathscr{P})$.

On note $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathscr{P})$. Alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ce qui donne les équations $-4a + b + 2c = 0$ et $4a - 2b = 0$, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases} -8a + 2b + 4c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4a + 4c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ b = 2a \end{cases}$$

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Avec $a = 1$, on obtient $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $(\mathscr{P}) : x + 2y + z + d = 0$ où d est un réel qu'il reste à déterminer.
L'appartenance du point A à $(\mathscr{P})$ donne $d = -3$ et donc $(\mathscr{P}) : x + 2y + z - 3 = 0$.

Exemple On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$. Dans ce repère on considère les points $I(1\,;0\,;0)$, $J(0\,;1\,;0)$ et $K(0\,;0\,;1)$. Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-1=0$ et admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.



MÉTHODE 5 Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan

► Ex. 55 p. 20

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1) Tester le parallélisme de (d) et $(\mathscr{P})$ en calculant $\vec{u}\cdot\vec{n}$:
   a) si $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathscr{P})$;
   b) si $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$, alors (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M.
2) Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et $(\mathscr{P})$ afin de calculer les coordonnées de M.

Exercice d'application Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $3x+z+7=0$.
Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

Correction Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$. Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{n}=-3$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \\ 3x+z+7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \\ 3(1-t)+5+7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 \\ x = -4 \\ y = 10 \\ z = 5 \end{cases}$$

Ainsi, $M(-4\,;10\,;5)$.

Exercice d'application Même consigne avec la droite (d) : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-2t \\ z = 3+5t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ et le plan $(\mathscr{P})$: $-6x-2y-2z+1=0$.

Correction Avec les mêmes notations que précédemment, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ sont parallèles. De plus, le point $A(1\,;2\,;3)$ par lequel passe (d) n'appartient pas à $(\mathscr{P})$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ sont strictement parallèles.

MÉTHODE 6 Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans

► Ex. 69 p. 21

Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

1) Tester le parallélisme de $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

2) Si les plan ne sont pas parallèles :
   a) écrire le système composé des équations décrivant $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$;
   b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;
   c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives $x+2y+z-1=0$ et $2x-3y-z+2=0$.
Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

Correction

$(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$. Ils ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ se coupent selon une droite (d). Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x+2y+z-1 = 0 \\ 2x-3y-z+2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y+z-1 = 0 \\ 3x-y+1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 3x+1 \\ z = 1-x-2y=-7x-1 \end{cases}$$

On peut vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel (ici Xcas en ligne) :

```
linsolve([x+2y+z-1=0, 2x-3y-z+2=0], [y, z])
```

$[3x+1, -7x-1]$

Ainsi, les coordonnées de M sont de la forme $(x\,;3x+1\,;-7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ et donc, en choisissant x comme paramètre, on obtient une représentation paramétrique de (d) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1+3t \\ z = -1-7t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Exercice d'application

Même consigne avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives $2x-4y+3z-5=0$ et $-4x+8y-6z+10=0$.

Correction

En reprenant les mêmes notations, $\vec{n}_1\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-4\\8\\-6\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans sont parallèles. Comme les deux équations sont équivalentes, on en déduit que $(\mathscr{P}_1)=(\mathscr{P}_2)$.

S'entraîner

Activités mentales

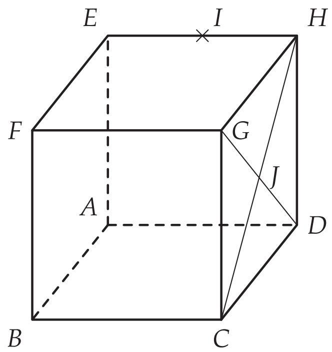
1 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$ on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. On note θ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculer :

1) $\|\vec{u}\|$ **2)** $\|\vec{v}\|$ **3)** $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **4)** θ

2 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$. Calculer :

1) $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$
2) $\vec{v}\cdot(-\vec{u}+2\vec{v})$
3) $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$
4) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})$

3 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a > 0$. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



Exprimer en fonction de a les produits scalaires :

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH}$
3) $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{GC}$
4) $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FC}$
5) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}$
6) $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{GD}$

4 Même consigne qu'à l'exercice **3** avec :

1) $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FI}$
2) $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GJ}$
3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GJ}$
4) $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{FB}$

5 Même consigne qu'à l'exercice **3** avec :

1) $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{GE}$
2) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GD}$
3) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CG}$
4) $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{FG}$

6 On reprend le cube de l'exercice **3** avec $a = 1$.

1) Donner les coordonnées du point G dans le repère :
  a) $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$
  b) $(C\,;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CG})$
  c) $(H\,;\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HD},\overrightarrow{HG})$
  d) $(F\,;\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FE})$

2) Même question avec le point B.

3) Même question avec le point J.

7 On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\\24\end{pmatrix}$

4) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

8 On reprend le cube de l'exercice **3**.
Pour chacun des plans suivants, citer, en justifiant, un vecteur normal à ce plan :

1) (BCG) **2)** (BCH)

9 On reprend le cube de l'exercice **3**.
Pour chacun des vecteurs suivants, citer, en justifiant, un plan auquel ce vecteur est normal :

1) $\overrightarrow{BF}$ **2)** $\overrightarrow{AC}$

10 Dans chacun des cas suivants, donner un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ au plan $(\mathscr{P})$ respectant les contraintes distinctes données :

1) $(\mathscr{P}) : x - 3y + z - 1 = 0$ avec $a = 2$.
2) $(\mathscr{P}) : -2x + 3y + z + 8 = 0$ avec $b = 1$.
3) $(\mathscr{P}) : -x + 4y - 5z - 7 = 0$ avec $b = -8$.
4) $(\mathscr{P}) : 2x - y + 6z - 7 = 0$ avec $c = 3$.

11 Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$:

1) $A(0\,;1\,;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

2) $A(-1\,;4\,;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$

3) $A(-1\,;2\,;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\2\\-4\end{pmatrix}$

4) $A(-1\,;1\,;6)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-4\\2\end{pmatrix}$

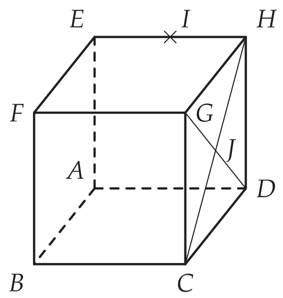
Produit scalaire dans l'espace

12 ROC

Dans un repère orthonormé de l'espace :

1) rappeler la formule de la norme d'un vecteur ;
2) énoncer la formule de l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs et la démontrer.

13 On considère le cube suivant, d'arête $a > 0$ où I est le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

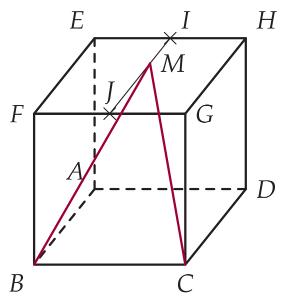


En considérant des décompositions sur les arêtes du cube, exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{FH}$
2) $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IH}$
3) $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{IF}$
4) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EJ}$
5) $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$
6) $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{CH}$

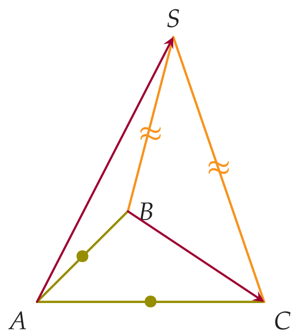
14 Reprendre l'exercice **13** en se plaçant dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$.

15 On considère le cube suivant, d'arête 1, où I et J sont les milieux respectifs de $[EH]$ et $[FG]$. Soit M un point appartenant à $[IJ]$.



1) a) Démontrer que pour $M \neq J$, les triangles MJB et MJC sont rectangles en J.
   b) En déduire que $MB = MC$.
   c) En déduire que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MB^2 - \frac{1}{2}$.
2) Déterminer la ou les positions du point M pour que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 1$.

16 Soit $SABC$ un tétraèdre de tel que les triangles ABC et SBC soient isocèles respectivement en A et S :

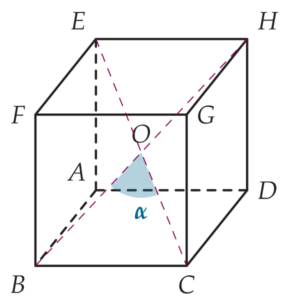


Démontrer que $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Calculs d'angles

17 ► MÉTHODE 1 p. 6

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1 et de centre O.



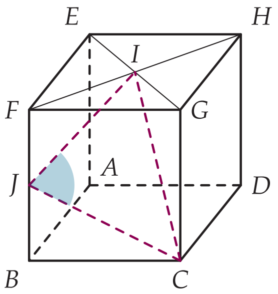
Calculer la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{BOC}$ au degré près.

18 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1\,;-2\,;3)$, $B(-1\,;0\,;1)$ et $C(2\,;1\,;0)$.

Calculer, au dixième de degré près, la mesure des angles :

1) $\widehat{ABC}$
2) $\widehat{BAC}$
3) $\widehat{ACB}$

19 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J le milieu de l'arête $[BF]$.



On cherche à calculer la mesure de l'angle $\widehat{CJI}$ au degré près.

1) Méthode géométrique

a) Calculer les trois longueurs du triangle IJC.

b) En déduire que $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{4}$.

c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.

2) Autre méthode géométrique

a) Calculer $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$ en décomposant astucieusement les deux vecteurs sur les côtés du cube.

b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.

3) Méthode analytique

a) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, calculer analytiquement $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$.

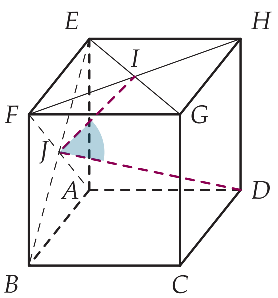
b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.

4) Quelle est la méthode :

a) qui demande le moins / le plus de connaissances théoriques ?

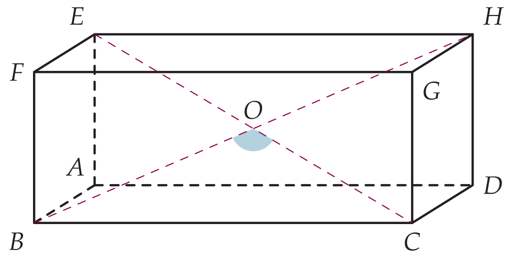
b) la moins / la plus rapide ?

20 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J celui de la face $ABFE$.



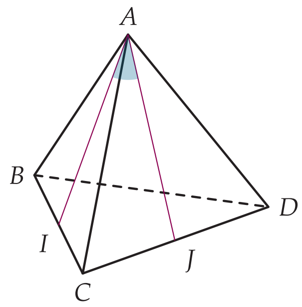
En se plaçant dans un repère orthonormé bien choisi, calculer, au degré près, la mesure de l'angle $\widehat{IJD}$.

21 On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$, $AD = 5$ et $AE = 2$. On note O son centre.



En se plaçant dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ au centième de degré près.

22 On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 2. Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.



1) **a)** Calculer les longueurs AI, AJ et IJ.

b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.

2) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, au dixième de degré près.

23 Refaire l'exercice **22** en traitant le cas général d'un tétraèdre régulier d'arête $a > 0$.

Orthogonalité

24 **ROC**

Démontrer que si un vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan $(\mathscr{P})$, alors $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

25 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ -2 \\ k-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

26 Même exercice que le **29** avec les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} k+1 \\ -k \\ 2 \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

27 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1\,;2\,;1)$, $B(4\,;6\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que le point A ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.

2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

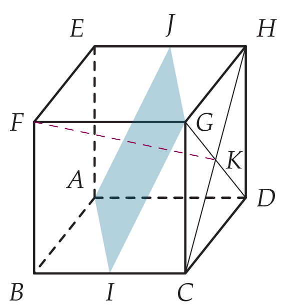
28 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les quatre points $A(-1\,;1\,;2)$, $B(1\,;0\,;-1)$, $C(0\,;3\,;1)$ et $D(-8\,;2\,;-3)$.

1) Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.

2) Démontrer que $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à ce plan.

29 ► MÉTHODE 2 p. 8

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$ et K le centre de la face $CDHG$.



Sans utiliser de repère :

1) démontrer que les points A, I, G et J sont coplanaires ;

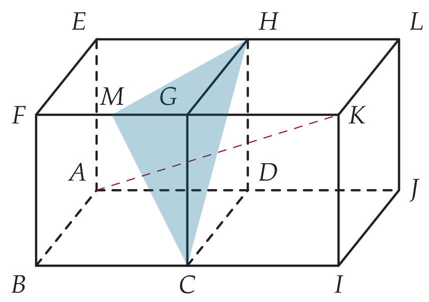
2) **a)** démontrer que (FK) est orthogonale à (IJ) ;

b) démontrer que (FK) est orthogonale à (AI) ;

c) en déduire que (FK) est orthogonale au plan (AIG).

30 Reprendre l'exercice **29** en travaillant dans un repère orthonormé bien choisi.

31 On considère deux cubes, disposés comme dans la figure associée. M est le milieu de $[FG]$. On souhaite démontrer que (AK) est orthogonale au plan (MHC).



1) Démontrer que $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{CM}$, puis en déduire la valeur de ce produit scalaire.

2) En suivant cette méthode, calculer $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{HM}$.

3) Conclure.

32 **Une erreur courante**

Dans cet exercice, on va mettre en évidence de façon analytique la remarque de la page 9. On munit l'espace d'un repère orthonormé.

1) Relire cette remarque. À votre avis, quelle est l'erreur courante qui est commise ?

2) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, considérons les plans $(\mathscr{P})$: $2x - 3y - z + 4 = 0$ et $(\mathscr{Q})$: $x + 2y - 4z - 5 = 0$.

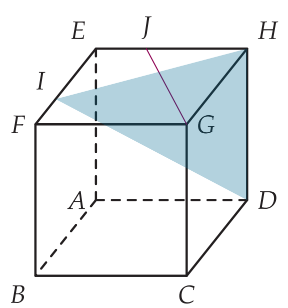
a) Vérifier que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont bien orthogonaux.

b) Vérifier que $A(1\,;1\,;3)$ et $B(-1\,;-1\,;5)$ appartiennent à $(\mathscr{P})$.

c) Vérifier que $C(1\,;6\,;2)$ et $D(-3\,;0\,;-2)$ appartiennent à $(\mathscr{Q})$.

d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ? parallèles ?

33 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.



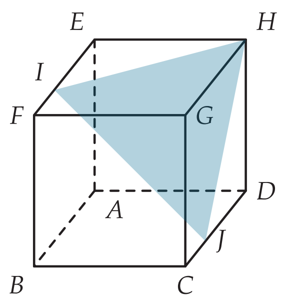
1) Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH).

2) Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD).

3) En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID).

4) Démontrer que le point d'intersection entre le plan (IHD) et la droite (GI) a pour coordonnées $\left(\frac{4}{13}\,;\frac{7}{13}\,;1\right)$ dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

34 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.



On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On considère la droite (Δ), orthogonale au plan (IHJ) et passant par G. Elle coupe respectivement les plans (ABD) et (ADE) en M et N dont ou souhaite déterminer les coordonnées.

1) Pourquoi (Δ) est-elle orthogonale à (IH) et (JH) ?

2) On note $M(x; y; z)$.

a) Déterminer z.

b) Utiliser l'orthogonalité des droites (Δ) et (IH) puis (Δ) et (JH) afin d'en déduire un système de deux équations que satisfont x et y.

c) Résoudre ce système.

d) À quel plan, autre que (ABD), M appartient-il ?

3) En utilisant la même méthode, déterminer les coordonnées du point N.

35 **Distance d'un point à une droite** INFO

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1\,;-1\,;2)$ et $B(1\,;1\,;1)$ ainsi que le vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. On note (d) la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

Soit M un point appartenant à (d). Le but de l'exercice est de déterminer la longueur minimale de $[BM]$ ainsi que la ou les positions du point M rendant cette longueur minimale.

> La distance d'un point B à une droite (d) est la plus petite distance BM lorsque M parcourt (d).

1) Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel.

2) Donner une représentation paramétrique de (d).

3) **a)** Démontrer que répondre au problème poser revient à déterminer le minimum, ainsi que la valeur pour laquelle il est atteint de :

$$t \mapsto 14t^2 - 22t + 9.$$

b) Répondre alors au problème posé.

c) Que peut-on alors écrire concernant la droite (d) et le vecteur $\overrightarrow{BM}$?

36 Même consigne qu'à l'exercice **35** avec le point $B(-2\,;1\,;0)$ et la droite (d) engendrée par le point $A(5\,;-2\,;6)$ et le vecteur $\vec{u} = -\vec{i} - 2\vec{k}$.

Équation cartésienne d'un plan

37 ROC

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, soient $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point.

Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$, admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal et passant par A est de la forme $ax + by + cz + d = 0$. On donnera a, b, c et d en fonction des coordonnées de $\vec{n}$ et de A.

38 ► MÉTHODE 3 p. 11

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(-1\,;2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$.

39 Même consigne qu'à l'exercice **38** avec :

1) $A(1\,;4\,;-5)$ et le vecteur $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$;

2) $A\left(\sqrt{2}\,;2\,;-\sqrt{3}\right)$ et le vecteur $\vec{n} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$.

40 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par :

1) $A(2\,;1\,;0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{OA}$;

2) $A\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\,;2\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AO}$;

3) $A(5\,;-3\,;4)$ et de vecteur normal $\vec{k}$;

4) $A(2\,;-1\,;\sqrt{3})$ et de vecteur normal $\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}$.

41 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ lorsque :

1) $A(2\,;1\,;0)$ et $B(-4\,;-1\,;3)$;

2) $A(4\,;-5\,;6)$ et $B(1\,;-1\,;1)$;

3) $A(2\,;-1\,;0)$ et $B\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{2}{3}\,;1\right)$;

4) $A(1\,;0\,;0)$ et $B(1\,;0\,;0)$.

42 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$, parallèle au plan $(\mathscr{P})$ et passant par le point A lorsque :

1) $(\mathscr{P}) : x+y+z-1=0$ et $A(1\,;1\,;1)$;

2) $(\mathscr{P}) : x-3y+2z-4=0$ et $A(3\,;0\,;-1)$;

3) $(\mathscr{P}) : \frac{1}{3}x-\frac{5}{6}y-z-2=0$ et $A\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{5}\,;\frac{1}{6}\right)$;

4) $(\mathscr{P}) : \sqrt{5}x-2y-\sqrt{2}z-4=0$ et $A(1\,;1\,;-1)$.

43 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer dans chacun des cas suivants si H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$:

1) $(\mathscr{P})$ a pour équation $-2x+3y-z+8=0$;

- **a)** $A(2\,;2\,;-4)$ et $H(4\,;-1\,;-3)$;
- **b)** $A(0\,;4\,;-4)$ et $H(2\,;1\,;-3)$.

2) $(\mathscr{P})$ a pour équation $7x-5y-6z+1=0$;

- **a)** $A(-5\,;5\,;1)$ et $H(9\,;-5\,;13)$;
- **b)** $A(7\,;-6\,;7)$ et $H(0\,;-1\,;1)$.

3) $(\mathscr{P})$ a pour équation $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z-\frac{1}{5}=0$;

- **a)** $A(7\,;-2\,;4)$ et $H\left(4\,;0\,;\frac{5}{2}\right)$;
- **b)** $A\left(-5\,;5\,;-\frac{43}{15}\right)$ et $H\left(1\,;1\,;\frac{2}{15}\right)$.

44 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer, dans chacun des cas suivants, les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur $(\mathscr{P})$:

1) $(\mathscr{P}) : x+y+z-1=0$ et $A(1\,;1\,;1)$;

2) $(\mathscr{P}) : 2x-3y+4z-5=0$ et $A(1\,;2\,;3)$;

3) $(\mathscr{P}) : -x-2y+11z+5=0$ et $A(-1\,;-4\,;3)$;

4) $(\mathscr{P}) : ax+by+cz+d=0$ et $A(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$.

45 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, décrire, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que :

1) $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}=3$;

2) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{j}=-1$ avec $A(1\,;-2\,;3)$;

3) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ avec $A(1\,;-2\,;3)$ et $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$;

4) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=5$ avec $A(-2\,;4\,;1)$ et $\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$.

46 On reprend la figure de l'exercice **29**, dans lequel la droite (FK) est orthogonale au plan (AIG).

1) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (AIG).

2) Même question en se plaçant dans le repère orthonormé $(B\,;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BF})$.

47 On reprend la figure de l'exercice **31**, dans lequel la droite (AK) est orthogonale au plan (MHC).

1) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (MHC).

2) Même question en se plaçant dans le repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

48 On reprend la figure de l'exercice **33**, dans lequel la droite (GI) est orthogonale au plan (IHD).
En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (IHD).

49 ► MÉTHODE 4 p. 11
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les trois points $A(-1\,;-1\,;1)$, $B(1\,;2\,;-1)$ et $C(0\,;1\,;1)$.
Déterminer, s'il existe, une équation cartésienne du plan (ABC).

50 Même consigne qu'à l'exercice **49** avec :

1) $A(5\,;-4\,;1)$, $B(6\,;3\,;9)$ et $C(-8\,;1\,;7)$;

2) $A(3\,;4\,;5)$, $B(4\,;-2\,;7)$ et $C(5\,;-8\,;9)$;

3) $A(-1\,;7\,;4)$, $B(-2\,;10\,;5)$ et $C(3\,;6\,;-1)$.

51 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-s+4t \\ y & = & 2+2s-t \\ y & = & -1+s+2t \end{array}\right. ,\quad s\in\mathbb{R},\quad t\in\mathbb{R}.$$

1) Cette représentation paramétrique définit-elle un plan ?

2) Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

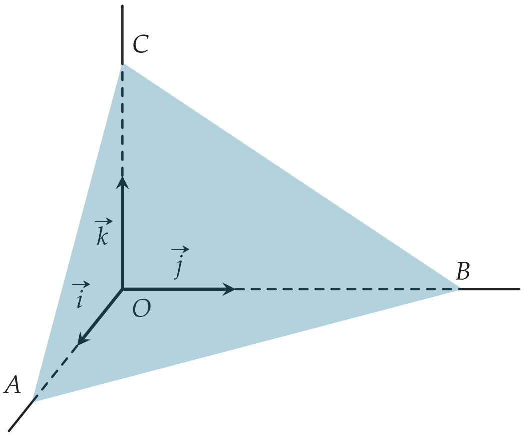
S'entraîner

52 Même consigne qu'à l'exercice **51** avec les représentations paramétriques suivantes :

1)
$$\begin{cases} x = -5+2s-4t \\ y = 7-3s+6t \\ y = \sqrt{2}-s+2t \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2)
$$\begin{cases} x = 4s-t \\ y = -1-2s+t \\ y = 5+s+t \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

53 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(\alpha;0;0)$, $B(0;\beta;0)$ et $C(0;0;\gamma)$ où α, β et γ sont trois réels. On considère, lorsqu'il existe, le plan (ABC).



1) À quelle(s) condition(s) sur α, β et γ le plan (ABC) est-il bien défini ?

2) Étude des cas particuliers.

a) Lorsque $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$, décrire le plan (ABC).

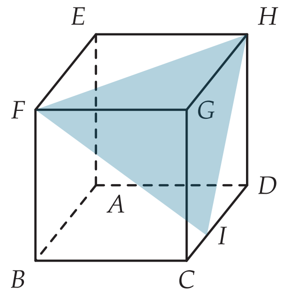
b) Même question lorsque $\beta = 0$ et α et γ non nuls.

c) Même question lorsque $\gamma = 0$ et α et β non nuls.

3) Étude du cas général où α, β et γ sont tous non nuls. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}-1=0.$$

4) Expliquer pourquoi l'équation suivante regroupe les différents cas étudiés :
$$\beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta z-\alpha\beta\gamma=0.$$

54 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 et le point I tel que $3\overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{DC}$.



En se plaçant dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (FHI).

Intersection d'une droite et d'un plan

55 ► MÉTHODE 5 p. 12

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = -7+t \\ y = 4+2t \\ z = -5-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$
et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne :
$$-2x-3y+z-6=0.$$
Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

56 Même consigne qu'à l'exercice **55** avec la droite
$$(d) : \begin{cases} x = -1-2s \\ y = 2-s \\ z = -3+5s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$$
et le plan
$$(\mathscr{P}) : -x-5y-z-6=0.$$

57 Même considération qu'à l'exercice **55** avec la droite
$$(d) : \begin{cases} x = 4-k \\ y = -12+5k \\ z = 9-6k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$$
et le plan
$$(\mathscr{P}) : 4x+2y+z-1=0.$$

58 Même raisonnement qu'à l'exercice **55** avec la droite
$$(d) : \begin{cases} x = 6+t \\ y = -1+2t \\ z = -3-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

et le plan

$$(\mathscr{P}) : x + y + 3z - 1 = 0.$$

59 Même consigne qu'à l'exercice **55** avec la droite (d) engendrée par $A(6\,;-2\,;-3)$ et $\vec{u} = 5\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$ et le plan $(\mathscr{P}) : -5x - 7y + 10z + 6 = 0$.

60 Même raisonnement qu'à l'exercice **55** avec la droite (d) passant par les points $A(-5\,;4\,;-3)$ et $B(1\,;-2\,;3)$ et le plan $(\mathscr{P}) : x + y + 3z - 1 = 0$.

61 Même instruction qu'à l'exercice **55** avec la droite (d) passant par les points $A(1\,;2\,;-1)$ et $B(2\,;4\,;1)$ et le plan $(\mathscr{P}) : -\frac{4}{5}x - \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}z - 2 = 0$.

62 Même consigne qu'à l'exercice **55** avec la droite (d) passant par les points $A(2\,;4\,;5)$ et $B(-2\,;0\,;3)$ et le plan $(\mathscr{P}) : \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0$.

63 Même raisonnement qu'à l'exercice **55** avec le plan $(\mathscr{P}) : 4x - 6y + 5z - 3 = 0$ et :

1) l'axe des abscisses ;
2) l'axe des ordonnées ;
3) l'axe des cotes.

64 Même consigne qu'à l'exercice **55** avec la droite (d) passant par les points $A(2\,;-5\,;3)$ et $B(-2\,;4\,;-8)$ et le plan $(\mathscr{P})$ passant par $C(4\,;-1\,;2)$ et dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

65 **Distance d'un point à un plan**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère un plan $(\mathscr{P})$ et un point A.

Soit M un point appartenant à $(\mathscr{P})$. Le but de l'exercice est de déterminer la longueur minimale de $[AM]$ ainsi que la ou les positions du point M rendant cette longueur minimale.

> La distance d'un point A à un plan $(\mathscr{P})$ est la plus petite distance AM lorsque M parcourt $(\mathscr{P})$.

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.
  a) Faire un schéma.
  b) De quelle droite et de quel plan H est-il l'intersection ?
  c) Démontrer que si M est un point de $(\mathscr{P})$ différent de H, alors $AM > AH$.
  La distance de A à $(\mathscr{P})$ est donc la distance AH.

2) Soit $(\mathscr{P}) : x - 2y - 2z - 31 = 0$ et $A(2\,;1\,;-2)$.
  a) Donner un vecteur directeur de (AH).
  b) En déduire les coordonnées du point H puis la longueur AH.

66 Reprendre la question **2)** de l'exercice **65** avec le plan $(\mathscr{P}) : -x + 2y + 3z - 15 = 0$ et le point $A(2\,;0\,;1)$.

67 Reprendre la question **2)** de l'exercice **65** avec le plan $(\mathscr{P}) : 3x - 2y - z - 1 = 0$ et le point $A(3\,;1\,;-2)$.

68 On reprend la figure de l'exercice **54** où une équation cartésienne de (FHI) est $3x + 3y + 2z - 5 = 0$.
Déterminer la distance des deux points suivants au plan (FHI) :

1) G (on notera K le projeté de G sur (FHI)) ;
2) A (on notera L le projeté de A sur (FHI)).

Intersection de deux plans

69 ► MÉTHODE 6 p. 13

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x + y + 2z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 4y - 5z + 6 = 0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

70 Même consigne qu'à l'exercice **69** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y - 2z + 4 = 0.$$

71 Même consigne qu'à l'exercice **69** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - y - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad -2x + 2y + 4z + 4 = 0.$$

72 Même consigne qu'à l'exercice **69** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$3x + 9y - 6z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

73 INFO

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$

d'équations cartésiennes respectives :

$$x-2y+3z-5=0 \quad \text{et} \quad 3x+y-2z+1=0.$$

1) À l'observation des deux équations, semble-t-il évident ou du moins facile de voir quelle(s) inconnue(s) est-il le plus judicieux de choisir en paramètre ?

2) Voici la résolution du système avec« Xcas en ligne », où l'on a choisi à chaque fois un paramètre différent.

```
linsolve([x-2y+3*z-5=0, 3x+y-2z+1=0], [x, y])
```

$$\left[\frac{1}{7}z+\frac{3}{7},\frac{11}{7}z+\frac{-16}{7}\right]$$

```
linsolve([x-2y+3*z-5=0, 3x+y-2z+1=0], [x, z])
```

$$\left[\frac{1}{11}y+\frac{7}{11},\frac{7}{11}y+\frac{16}{11}\right]$$

```
linsolve([x-2y+3*z-5=0, 3x+y-2z+1=0], [y, z])
```

$$[11x-7,7x-3]$$

Retrouver le résultat le plus simple, en choisissant correctement le paramètre.

Plans médiateurs

74 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(4\,;2\,;2)$ et $B(-9\,;-10\,;2)$.
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace tels que $MA=MB$.

1) Démontrer que $\mathscr{E}$ est le plan d'équation :

$$26x+24y+161=0.$$

> Par définition, on appelle plan médiateur d'un segment $[AB]$ l'ensemble des points M de l'espace équidistant de A et B.

2) a) Démontrer que le milieu de $[AB]$ appartient à $\mathscr{E}$.
   b) Démontrer qu'un vecteur normal à $\mathscr{E}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
   c) En déduire une caractérisation de $\mathscr{E}$.

75 Même remarque qu'à l'exercice **74** avec les points $A(1\,;9\,;-7)$ et $B(4\,;0\,;3)$.

76 Même consigne qu'à l'exercice **74** en traitant le cas général où $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$.

Équations de sphères

77 On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Soit $A(1\,;-2\,;2)$ un point de l'espace et $\mathscr{S}$ la sphère de centre A et de rayon 3. En procédant de la même façon que pour le cercle en classe de Première S, déterminer une équation de $\mathscr{S}$.

2) Donner, dans le cas général, une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de rayon r.

78 On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, dire si l'équation donnée est une équation de sphère et lorsque c'est le cas, déterminer son centre et son rayon :

1) $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2-36=0$;
2) $x^2+(y+1)^2+z^2+225=0$;
3) $x^2-2x+y^2+z^2+z=0$;
4) $x^2-2x+y^2-z^2+z=0$.

79 **Intersection d'une sphère et d'une droite** INFO

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1\,;-2\,;2)$, $B(1\,;-5\,;4)$ et $C(-1\,;3\,;-1)$.
Le but de l'exercice est de déterminer, s'ils existent, les points d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ de centre A et de rayon 3 avec la droite (BC).

1) a) Représenter $\mathscr{S}$ ainsi que (BC) avec un logiciel de géométrie.
   b) Construire leur intersection.
2) a) Déterminer une équation de $\mathscr{S}$.
   b) Déterminer une équation de la droite (BC).
3) Résoudre le système composé des équations de $\mathscr{S}$ et de (BC) et en déduire la réponse au problème posé.

80 Même consigne qu'à l'exercice **79** avec la sphère de centre $A(2\,;-3\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{21}$ ainsi que la droite passant par les points $B(5\,;3\,;-1)$ et $C(-7\,;-3\,;5)$.

81 Même consigne qu'à l'exercice **79** avec la sphère de centre $A(1\,;-1\,;1)$ et de rayon 12 ainsi que la droite passant par les points $B(-5\,;2\,;6)$ et $C(-7\,;0\,;-3)$.

82 **Intersection d'une sphère et d'un plan (1)** INFO

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A(1\,;-2\,;3)$ et de rayon $\sqrt{10}$.
On considère aussi le plan $(\mathscr{P})$ passant par O et dirigé par $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

1) a) Représenter $\mathscr{S}$ ainsi que de $(\mathscr{P})$ dans un logiciel de géométrie.
   b) Construire leur intersection. Quelle semble être la

nature de cette intersection ?

2) **a)** Déterminer des équations de $\mathscr{S}$ et de $(\mathscr{P})$.

b) Résoudre le système composé des équations de $\mathscr{S}$ et de $(\mathscr{P})$ et retrouver le résultat conjecturé à la question **1)b)**.

83 **Intersection d'une sphère et d'un plan (2)** INFO

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A(2\,;-1\,;10)$ et de rayon $\sqrt{90}$. On considère aussi le plan (MNP), où $M(1\,;1\,;1)$, $N(-2\,;2\,;0)$ et $P(0\,;-2\,;-2)$.

1) Représenter $\mathscr{S}$ ainsi que de (MNP) dans un logiciel de géométrie et construire leur intersection.

2) **a)** Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de (MNP).

c) Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de A sur (MNP).

d) En déduire la distance du point A au plan (MNP).

e) En déduire que $\mathscr{S}$ et (MNP) ont une intersection, que l'on notera Γ.

3) Soit Q un point de Γ.

a) En considérant le triangle AHQ, déterminer la distance HQ.

b) Décrire alors Γ le plus précisément possible.

84 En reprenant la méthode de l'exercice **83**, déterminer l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $A(1\,;2\,;-3)$ et de rayon 5 avec le plan (MNP), où $M(1\,;-1\,;1)$, $N(-2\,;2\,;4)$ et $P(0\,;-2\,;-2)$.

85 En reprenant la méthode de l'exercice **83**, démontrer que la sphère $\mathscr{S}$ de centre $A(1\,;5\,;-3)$ et de rayon 5 et le plan (MNP), où $M(1\,;-1\,;1)$, $N(-2\,;2\,;4)$ et $P(0\,;-2\,;-2)$ n'ont pas d'intersection.

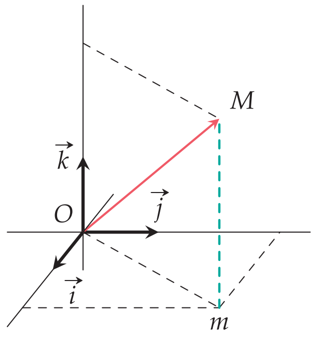
86 En reprenant la méthode de l'exercice **83**, déterminer l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $A(1\,;2\,;-1)$ et de rayon 5 avec le plan (MNP), où $M(-1\,;3\,;6)$, $N(6\,;-5\,;0)$ et $P(-4\,;-9\,;-3)$.

Démonstrations

87 **Expression analytique du produit scalaire, p. 5**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Notons M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ et m le projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathscr{P})$ engendré par le point O et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



1) Montrons que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

a) Pourquoi peut-on appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle OmM ?

b) Quelles sont les coordonnées du point m dans le plan $(\mathscr{P})$? En déduire une expression de Om^2 en fonction de x et y.

c) Expression mM en fonction de z.

d) En déduire une expression de OM^2 en fonction de x, y et z et conclure.

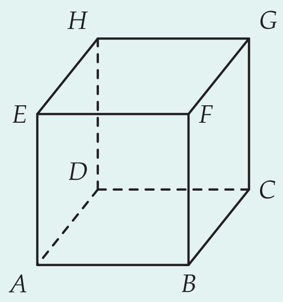
2) Montrons que $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$.

À l'aide d'une des deux formules donnant le produit scalaire en fonction des normes démontrer l'égalité demandée.

Préparer le bac

88 **D'après Bac (Pondichéry - 2015)**

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1.



Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on considère les points $M\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ et $P\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$.

1) a) Reproduire la figure et placer les point M, N et P.

b) Démontrer que ces points sont alignés.

2) Démontrer que le triangle MNP est rectangle en M.

3) a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$, normal au plan (MNP).

b) En déduire une équation cartésienne de ce plan.

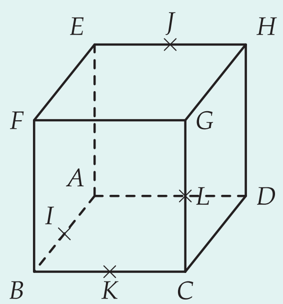
c) Soit (Δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$. Donner une équation paramétrique de (Δ).

d) Soit K le point d'intersection de (MNP) et (Δ). Démontrer que $K\left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35}\,;\frac{23}{35}\right)$.

e) En déduire le volume du tétraèdre $FMNP$.

89 **D'après Bac (Liban - 2015)**

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[EH]$, K celui de $[CB]$ et L celui de $[CG]$. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1) a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) En déduire une équation cartésienne de (IJK).

2) Déterminer une équation paramétrique de (FD).

3) Déterminer les coordonnées du point M d'intersection de (FD) et (IJK).

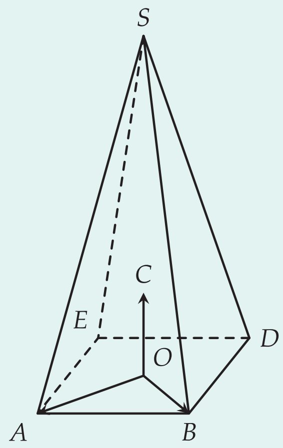
4) a) Calculer l'aire du triangle IJK.

b) En déduire le volume du tétraèdre $FIJK$.

5) Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

90 **D'après Bac (Amérique du Nord - 2015)**

Soit $SABDE$ une pyramide à base carrée $ABDE$ de centre O. On note C le point de l'espace tel que $(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ soit un repère orthonormé. Dans ce repère, soit S le point de coordonnées $(0\,;0\,;3)$.



Partie A

1) Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire U et démontrer que $U\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right)$.

2) Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SD). Démontrer que les droites (UV) et (BD) sont parallèles.

Construire V et déterminer ses coordonnées.

3) Soit $K\left(\frac{5}{6}\,;-\frac{1}{6}\,;0\right)$.

a) Démontrer que K est le pied de la hauteur issue de U du trapèze $AUVE$.

b) Démonter que l'aire de ce trapèze est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

Partie B

1) Démontrer que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (d), orthogonale au plan (EAU) et passant par S.

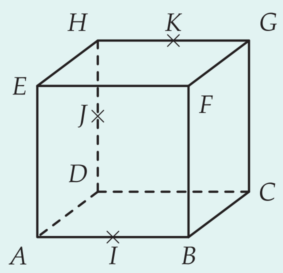
3) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite (d) et du plan (EAU).

4) Le plan (EAU) partage la pyramide $SABDE$ en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

91 D'après Bac (Polynésie - 2015)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[DH]$ et K celui de $[HG]$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal du plan (IJK).

2) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3) Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

92 D'après Bac (Métropole - 2015)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A(0\,;1\,;-1)$ et $B(-2\,;2\,;-1)$;
- la droite (d) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

On note M un point appartenant à (d), de coordonnées $(-2+u\,;1+u\,;-1-u)$, où u est un réel.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) a) Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

b) Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas sécantes.

3) Vérifier que le plan $(\mathscr{P})$ d'équation :

$$x+y-z-3u=0$$

est orthogonal à la droite (d) et passe par le point M.

4) Montrer que le plan $(\mathscr{P})$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées :

$$(-4+6u\,;3-3u\,;-1).$$

5) a) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (d).

b) Existe-t-il une valeur du réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?

6) a) Exprimer MN^2 en fonction de u.

b) En déduire la valeur de u pour laquelle la distance MN est minimale et donner cette valeur minimale.

93 D'après Bac (Liban - 2014)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.

On se place dans un repère orthonormé de l'espace. On considère le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x-y+3z+1=0$ et la droite (d) dont un représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -5+3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

On considère aussi les points $A(1\,;1\,;0)$, $B(3\,;0\,;-1)$ et $C(7\,;1\,;-2)$.

Proposition 1

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -1+t \\ z = -2+t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2

Les droites (d) et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3

Les droites (d) et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4

La droite (d) coupe le plan $(\mathscr{P})$au point E de coordonnées $(8\,;-3\,;-4)$.

Proposition 4

Les plans $(\mathscr{P})$ et (ABC) sont parallèles.

Approfondir

94 Produit vectoriel

Dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on considère les vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$. On cherche les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ d'un vecteur $\vec{n}$, orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1) Démontrer que x, y et z satisfont le système :

$$\begin{cases} ax+by+cz &= 0\\ \alpha x+\beta y+\gamma z &= 0\end{cases}$$

2) Résoudre ce système en prenant z comme paramètre, c'est-à-dire en exprimant x et y en fonction de z.
3) En déduire, en choisissant judicieusement une valeur de z, que $\vec{n}\begin{pmatrix}b\gamma-c\beta\\c\alpha-a\gamma\\a\beta-b\alpha\end{pmatrix}$.

> On dit que $\vec{n}$ est le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) et on note $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.

4) Calculer $\vec{v}\wedge\vec{u}$. Que remarque-t-on ?

95 Distance d'un point à une droite

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}=\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}+\gamma\vec{k}$.
On note (d) la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

1) Soit H le projeté orthogonal de B sur (d).
Démontrer que si M est un point de (d) autre que H alors $BM > BH$.
2) On note $H(x\,;y\,;z)$.
   a) Après avoir écrit une représentation paramétrique de (d), et en utilisant le fait que $H\in(d)$, démontrer que la valeur du paramètre permettant d'obtenir les coordonnées du point H est $t=\dfrac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\vec{u}\|^2}$.
   b) Il s'agit maintenant de calculer BH. Est-ce une bonne idée ?
3) a) En exprimant astucieusement $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}$, démontrer que $AH=\dfrac{\left|\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\|\vec{u}\|}$.
   b) En déduire une expression de BH.

96 Distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on considère un point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et un plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.
   a) Faire un schéma.
   b) Démontrer que si M est un point de $(\mathscr{P})$ distinct de H, alors $AM > AH$.
2) On pose $\overrightarrow{AH}=\lambda\vec{n}$.
   a) Démontrer que :
   $$\lambda=-\frac{ax_A+by_A+cz_A+d}{\|\vec{n}\|^2}$$
   b) En déduire une expression de AH en fonction des coordonnées de A, des coefficients a, b, c et d et de $\|\vec{n}\|$.
3) Application.
On reprend la figure de l'exercice 54 où une équation cartésienne de (FHI) est $3x+3y+2z-5=0$.
Déterminer les distances des points suivants au plan (FHI) :
a) G ; b) A ; c) B ; d) D.

97 Perpendiculaire commune à deux droites INFO

Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Soient $A(-3,;4;5)$ et $B(-4\,;-1\,;-1)$ deux points et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ deux vecteurs.
On considère la droite (d) engendrée par A et $\vec{u}$ ainsi que la droite (Δ) engendrée par B et $\vec{v}$.
On cherche deux points K et L tels que $K\in(d)$, $L\in(\Delta)$ et (KL) soit perpendiculaire à (d) et (Δ).

1) Représenter la situation dans un logiciel et conjecturer une solution au problème.
2) On note $\overrightarrow{AK}=k\vec{u}$ et $\overrightarrow{BL}=l\vec{v}$, où k et l sont des réels. Déterminer les coordonnées de K, de L puis de $\overrightarrow{KL}$ en fonction de k et l.
3) Démontrer que (KL) est perpendiculaire à (d) et (Δ) si et seulement si :
$$\begin{cases} 2k-l &= -3\\ -3k+2l &= 4\end{cases}$$
4) Résoudre ce système puis en déduire les coordonnées des points K et L.
5) Calculer la distance KL.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Calculer un produit scalaire
- avec la formule utilisant le cosinus
- avec les projetés
- avec les propriétés algébriques, en décomposant
- avec les formules des carrés scalaires
- avec les coordonnées dans un repère orthonormé

Utiliser un produit scalaire
- pour calculer la mesure d'un angle
- pour démontrer une orthogonalité

Déterminer une équation cartésienne d'un plan
- connaissant un point et un vecteur normal
- connaissant trois points non alignés

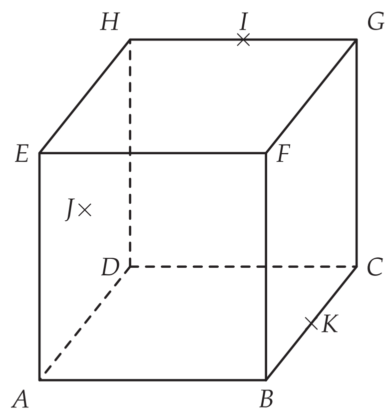
Déterminer l'intersection
- d'une droite et d'un plan
- de deux plans

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les exercices 98 à 116, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 2 ci-contre.
On note I le milieu de $[HG]$, K celui de $[BC]$ et J le centre de la face $ADHE$.
Lorsque cela sera nécessaire, on se placera dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



98 Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EI}$, il est préférable d'utiliser :

ⓐ une projection ⓑ une formule avec les carrés scalaires ⓒ les coordonnées

99 Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF}$, il est préférable d'utiliser :

ⓐ la formule avec le cosinus ⓑ une projection ⓒ une formule avec les carrés scalaires

100 Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BI}$, il est préférable d'utiliser :

ⓐ une projection ⓑ des décompositions ⓒ les coordonnées

101 Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{FG}$, il est préférable d'utiliser :

ⓐ une projection ⓑ des décompositions ⓒ les coordonnées

102 $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EI} =$

(a) 0 (b) 2 (c) 4

103 $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IF} =$

(a) 3 (b) 4 (c) 9

104 $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BI} =$

(a) $1{,}5$ (b) 3 (c) 6

105 $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} =$

(a) 2 (b) 4 (c) 8

106 $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JI} =$

(a) -4 (b) 0 (c) 4

107 $\widehat{JBI} =$

(a) $\dfrac{\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BI}}{BJ \times BI}$ (b) $0,82$ (c) $35,26°$

108 Déterminer un vecteur normal au plan (BJI) revient à résoudre le système :

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} -2a+b+c & = & 0 \\ -a+2b+2c & = & 0 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcl} -2a+b+c & = & 0 \\ a+b+c & = & 0 \end{array}\right.$ (c) $\left\{\begin{array}{rcl} -a+2b+2c & = & 0 \\ a+b+c & = & 0 \end{array}\right.$

109 Un vecteur normal au plan (BJI) est :

(a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (b) $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

110 Une équation cartésienne du plan (BJI) est :

(a) $-x+y+1=0$ (b) $-x+z+1=0$ (c) $-y+z=0$

111 L'intersection de la droite (EK) et du plan (BJI)

(a) est $M\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ (b) est $M(4;2;2)$ (c) est la droite (EK) (d) n'existe pas

112 L'intersection de la droite (HB) et du plan (BJI)

(a) est $B(1;0;0)$ (b) est $M(1;1;1)$ (c) est la droite (HB) (d) n'existe pas

113 Soit L le centre de $DCGH$. L'intersection de la droite (KL) et du plan (BJI)

(a) est $K(2;1;0)$ (b) est $M(2;1;1)$ (c) est la droite (KL) (d) n'existe pas

114 Un vecteur normal au plan (EKI) est :

ⓐ $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\-3\end{pmatrix}$ ⓑ $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$ ⓒ $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$

115 Une équation cartésienne du plan (EKI) est :

ⓐ $4x-2y+3z-6=0$ ⓑ $4x-2y+3z+6=0$ ⓒ $4x-2y-3z-6=0$

116 L'intersection du plan (EKI) et du plan (BJI)

ⓐ est (d) : $\begin{cases} x &= t \\ y &= 6-4t \quad , \quad t\in\mathbb{R} \\ z &= 6-4t \end{cases}$

ⓑ est (d) : $\begin{cases} x &= 1,5-0,25t \\ y &= t \quad , \quad t\in\mathbb{R} \\ z &= t \end{cases}$

ⓒ est le plan $(EKI)=(BJI)$

ⓓ n'existe pas

Travaux pratiques

TP 1 Aire minimale

INFO

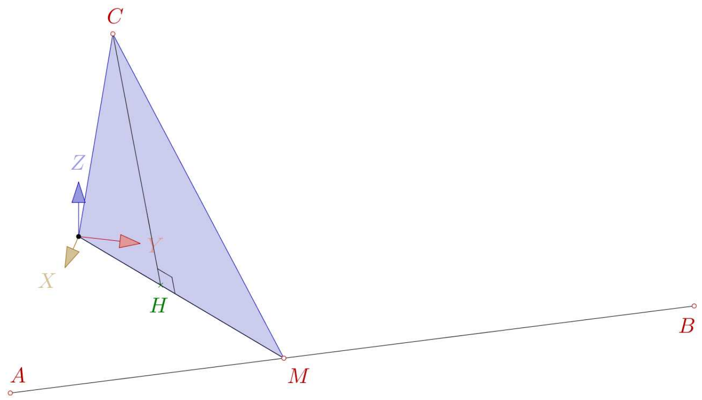
Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace, on considère les points $A(5\,;0\,;0)$, $A(0\,;10\,;0)$ et $C(2\,;1\,;5)$. On considère aussi un point M mobile appartenant au segment $[AB]$.
Le but de ce TP est de déterminer la valeur minimale de l'aire du triangle OMC ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.

1 Étude expérimentale

Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrique dynamique, faire afficher l'aire du triangle OMC et conjecturer une réponse au problème posé.

2 Étude théorique

Notons H la projection orthogonale de C sur (OM) (disponible dans les macros 3D de CaRMetal 4).



1) Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) (on notera t le paramètre) puis en déduire les coordonnées de M en fonction de t.

2) a) Déterminer une équation paramétrique de la droite (OM) (on notera s le paramètre).

b) En déduire que les coordonnées du point H sont :

$$H\left((5-2t)s\,;2ts\,;0\right) \quad \text{où} \quad s=\frac{2}{t^2-2t+5}$$

3) a) En utilisant un logiciel de calcul (ici Maxima), exprimer l'aire de OMC en fonction de t :

```
(%i1) s(t):=2/(t^2-2*t+5);
(%o1) s(t):= 2/(t^2-2 t+5)

(%i2) base(t):=sqrt(                    ), ratsimp;
(%o2) base(t):=sqrt(5 t^2-10 t+25)

(%i3) hauteur(t):=sqrt(                                    ), ratsimp;
(%o3) hauteur(t):=sqrt((5 t^2-10 t+25) s(t)^2-20 s(t)+30)

(%i4) f(t):=base(t)*hauteur(t)/2, ratsimp;
(%o4) f(t):= 1/2 (base(t) hauteur(t))
```

b) En continuant de s'aider du logiciel de calcul, établir le tableau de variation de f.

c) En déduire les coordonnées des points H et M puis l'aire du triangle OMC.

3 Prolongement et questions ouvertes

1) a) Démontrer que la valeur de t rendant minimale l'aire de OMC est aussi la valeur de t rendant minimales chacune des distances CH et OM.

b) Cette situation est-elle toujours vraie ? Argumenter.

2) a) Dans le logiciel de géométrique dynamique, faire afficher le lieu de H lorsque M parcourt (AB). Quelle conjecture peut-on faire ?

b) La démontrer.

(d'après l'IREM de Lyon)

TP 2 Symétrie orthogonale par rapport à un plan

INFO

> Dans l'espace, on appelle symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathscr{P})$ la transformation qui laisse invariant tout point de $(\mathscr{P})$ et qui à tout point M n'appartenant pas à $(\mathscr{P})$, associe le point M' tel que $(\mathscr{P})$ soit le plan médiateur du segment $[MM']$.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère un plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et un point $M(x_M\,;y_M\,;z_M)$.
On souhaite déterminer les coordonnées $(X\,;Y\,;Z)$ du point M', symétrique de M par rapport à $(\mathscr{P})$.

1 Mise en équation et résolution

1) a) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et du plan $(\mathscr{P})$?

b) Traduire vectoriellement cette information.

2) On note H l'intersection de $(\mathscr{P})$ et (MM').
Donner une expression des coordonnées de H en fonction de celles de M et de M'.

3) a) En déduire que X, Y et Z sont solutions du système suivant, où k est une inconnue à préciser :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X & = & ka+x_M \\ Y & = & kb+y_M \\ Z & = & kc+z_M \\ a(X+x_M)+b(Y+y_M)+c(Z+z_M)+d & = & 0 \end{array}\right.$$

b) Résoudre ce système à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

2 Expérimentation avec un logiciel

Soient $M(1\,;-1\,;3)$ un point de l'espace et $(\mathscr{P})$ le plan engendré par les points $A(2-2\,;1)$, $B(-1-2\,;3)$ et $C(11\,;1)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$.

2) a) Avec un logiciel de géométrie dynamique, placer les points A, B C et visualiser $(\mathscr{P})$.

b) Placer M puis M' en lui donnant les coordonnées trouvées dans la partie 1.
Vérifier que la construction est cohérente.

Travaux pratiques

TP 3 Plan tangent à une surface

INFO

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la surface, notée $(\mathscr{S})$, d'équation $z = x^2 + y^2$. On souhaite déterminer l'équation cartésienne du plan $(\mathscr{T})$, tangent à $(\mathscr{S})$ au point $A(1\,;1\,;2)$.

1) Vérifier que A appartient bien à $(\mathscr{S})$.

2) On se place dans le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x = 1$.

a) Peut-on donner une équation de ce plan sous la forme $z = \ldots$? Si non, donner une représentation paramétrique de ce plan.

b) On note $(\mathscr{C})$ la courbe intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{S})$. Démontrer qu'une équation de $(\mathscr{C})$ dans le plan $(\mathscr{P})$ est $z = 1 + y^2$.

c) Expliquer pourquoi, dans l'espace, $z = 1 + y^2$ n'est pas une équation de $(\mathscr{C})$. Déterminer une équation paramétrique de $(\mathscr{C})$.

d) Voici une capture d'écran du logiciel Maxima, permettant de représenter graphiquement $(\mathscr{S})$, $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$:

```
(%i1) load(draw)$
      draw3d(color = blue,
               explicit(x^2+y^2, x,-3,3,y,-3,3),
             color = brown,
               parametric_surface(1,u,v, u,-3,3, v,-3,18),
             color = green,
               line_width = 5,
               parametric(1,t,1+t^2, t,-3,3)
      );
```

Recopier et expliquer chacune des intructions.

e) Démontrer que dans $(\mathscr{P})$, une équation de (d_x), tangente à $(\mathscr{C})$ au point A, est $z = 2y$.

f) Donner une représentation paramétrique de (d_x) et la représenter avec le logiciel.

3) Reprendre le raisonnement précédant dans le plan $(\mathscr{Q})$ d'équation $y = 1$.
On notera (d_y) la tangente obtenue.

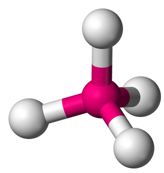
4) **a)** Démontrer que le point A et les deux droites (d_x) et (d_y) définissent bien un plan.

b) Donner une équation cartésienne de ce plan, sous la forme $z = \ldots$

c) Représenter ce plan ainsi que $(\mathscr{S})$ et observer que ce plan est bien le plan $(\mathscr{T})$ recherché.

Récréation, énigmes

1) En chimie, certaines molécules présentent une géométrie tétraédrique.



a) Citer quelques molécules de ce type.

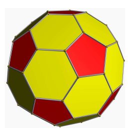
b) Quel est l'angle formé par l'atome central et deux atomes périphériques ?

2) La cristallographique est la sience qui a pour objet l'étude des substances cristallines à l'échelle atomique.

a) Citer quelques exemples de cristaux et donner leur forme géométrique.

b) Quels sont les angles dièdres ces polyèdres ?

3) Le ballon de football a pour modèle géométrique l'icosaèdre tronqué.
Quels sont les angles dièdres entre les deux types de faces ?



Source : commons.wikimedia.org/wiki/

SOLUTIONS

Chapitre G3
Produit scalaire dans l'espace et applications

Auto-évaluation

1 1) 16 3) -2.25
2) 4 4) $-1,75$

2 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}(5^2-4^2-2^2) = \frac{5}{2}$
2) a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\widehat{BAD} = 8\cos\widehat{BAD}$ donc $\cos\widehat{BAD} = \frac{5}{16}$ d'où $\widehat{BAD} \approx 71,8°$.
b) $\overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD} + AD^2 = 16-5+4 = 15$ d'où le résultat.

3 1) a)
$$(d_1) : \begin{cases} x = 4+2t \\ y = -5-t \\ z = 2+5t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$
b)
$$(d_2) : \begin{cases} x = -1+5t \\ y = 3 \\ z = -2+4t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$
1) a) $y = \frac{2}{3}$ donne $t = \frac{2}{3}$.
Donc $x = 3 - \frac{10}{3} = -\frac{1}{3}$ et $z = -4 + \frac{8}{3} = \frac{5}{3}$. $D \in (d)$.
b) $y = 2$ donne $t = 2$. Donc $x = 3-10 = -7 \neq -1$. $E \notin (d)$.

S'entraîner

1 1) $\|\vec{u}\| = 2$ 3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$
2) $\|\vec{v}\| = 3$ 4) $\theta = 60°$

2 1) 10 3) -7
2) 31 4) -17

3 1) a^2 4) a^2
2) $-a^2$ 5) a^2
3) 0 6) 0

4 1) $\frac{a^2}{2}$ 3) $-\frac{a^2}{2}$
2) $\frac{a^2}{2}$ 4) 0

5 1) 0 3) a^2
2) 0 4) $-\frac{a^2}{2}$

6 1)
a) $(1;1;1)$ c) $(0;0;1)$
b) $(0;0;1)$ d) $(0;1;0)$
2)
a) $(1;0;0)$ c) $(1;1;1)$
b) $(1;0;0)$ d) $(1;0;0)$
3)
a) $\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
b) $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ d) $\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$

7 1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6$ donc non.
2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ donc oui.
3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ donc oui.
4) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\sqrt{3}$ donc non.

8 1) $\overrightarrow{EF}$ car il est orthogonal à $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FB}$
2) $\overrightarrow{GD}$ car il est orthogonal à $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{BC}$

9 1) $(ABCD)$ car $\overrightarrow{BF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$
2) $(BDHF)$ car $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BF}$

10 1) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix}$ 3) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-8\\10\end{pmatrix}$
2) $\vec{n}\begin{pmatrix}-2/3\\1\\1/3\end{pmatrix}$ 4) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\3\end{pmatrix}$

11 1) $2x-3y+z+4=0$
2) $5x-y+2z+7=0$
3) $-7x+2y-4z-3=0$
4) $4x-2y+z=0$

17 On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Dans ce repère, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$ et $H(0;1;1)$. Ainsi, O, milieu de $[BH]$ a pour coordonnées $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$,
$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\-0,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$
donc $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 0,25$. De plus, $OB = 0,5\sqrt{3}$ donc $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 0,25\times 3\times\cos(\alpha)$ et ainsi, $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$ donc $\alpha \approx 71°$.

29 **1)** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IA}$ donc J appartient au plan engendré par I, $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IA}$.

2) a) $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}) \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{CH}$. D'une part, $\overrightarrow{FG}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{CH}$. D'autre part, (GK) et (CH) sont les diagonales d'un carré, donc orthogonales. Ainsi, $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$.

b) $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{JG} = 1 \times \frac{1}{2} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{JH} - \frac{1}{2}$. Or, $\overrightarrow{JH}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc orthogonal à $\overrightarrow{GK}$. Ainsi, $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$.

c) $(FK))$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $(AIGJ)$, donc orthogonale à ce plan.

38 $(\mathscr{P}) : x + 2y - 3z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$. $A \in (\mathscr{P})$ donc $-1 + 4 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$ et donc $(\mathscr{P}) : x + 2y - 3z - 6 = 0$.

49 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires donc (ABC) existe. On pose $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et on obtient

$$\begin{cases} 2a + 3b - 2c &= 0 \\ a + 2b &= 0 \end{cases}$$

Donc $a = 4c$ et $b = -2c$ d'où, en prenant $c = 1$, $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Donc $(ABC) : 4x - 2y + z + d = 0$ et avec A, on obtient $d = 1$.

55 (d) est dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{n} = -9$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point $P(x\,;y\,;z)$ tel que :

$$\begin{cases} x &= -7 + t \\ y &= 4 + 2t \\ z &= -5 - t \\ 0 &= -2x - 3y + z - 6 \end{cases}$$

Ainsi, $t = -1$ et donc $x = -8$, $y = 2$ et $z = -4$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-8\,;2\,;-4)$.

69 $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-1\\4\\-5\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ se coupent selon une droite (d). On résout :

$$\begin{cases} x + y + 2z - 3 &= 0 \\ -x + 4y - 5z + 6 &= 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - 3 &= 0 \\ 5y - 3z + 3 &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, $z = 1 + \frac{5}{3}y$ et $x = 1 - \frac{13}{3}y$ et donc (d) :

$$\begin{cases} x &= 1 - \frac{13}{3}t \\ y &= t \\ z &= 1 + \frac{5}{3}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Auto-évaluation QCM

98	a	**99**	c
100	c	**101**	a b
102	c	**103**	a
104	c	**105**	b
106	b	**107**	c
108	a b c	**109**	a b c
110	c	**111**	a
112	c	**113**	c
114	b	**115**	a
116	a b		