Chapitre n°12: Géométrie dans l'espace : parallélisme et orthogonalité.

Objectifs :

	Niveau		a	eca	n
C12.a	1	Savoir visualiser la position relative de droites et de plans.			
C12.b	1	Savoir étudier la position relative de droites et de plans (parallélisme).			
C12.c	1	Savoir étudier la position relative de droites et de plans (orthogonalité).			

Cours n°1

I) Positions relatives de droites et de plans de l'espace.

Définition n°1 : coplanaires

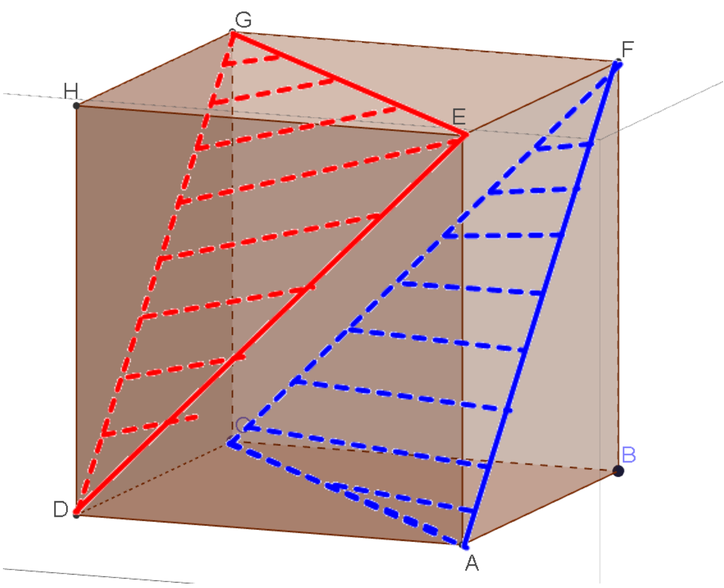
Deux droites sont **coplanaires** si elles appartiennent ….au…….même……….plan…….
…………………………………………………………………………

Définition n°2 : Strictement parallèles

Deux **plans** sont **strictement parallèles** s'ils n'ont
aucun……..point………en…….commun
……………………………………………………………
Deux **droites** sont **strictement parallèles** si elles sont
coplanaires……………………
et si elles n'ont
aucun……point……..en……..commun…………………………………………
Une droite et un plan sont **strictement parallèles** s'ils n'ont aucun…….point……
..en……commun……………………………………………………………

Exemple n°1:

Sur le cube ci-contre, citer :
– deux droites coplanaires :
(EH) et (EF)……………
– deux plans strictement parallèles :
(GED)…..et..(FAC)……….
– deux droites strictement parallèles :
(GE)…..et…(CA)……
– une droite et un plan strictement parallèles :
(GE)…..et…..(ABC).

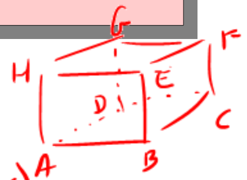


Propriété n°1

1) Deux plans de l'espace peuvent être soit :
- ...strictement parallèles... ;
- ...confondus... ;
- ...sécants... selon une ...droite... ;

2) Deux droites *coplanaires* de l'espace peuvent être soit :
- ...strictement parallèles... ;
- ...confondues... ;
- ...sécantes... ;

3) Une droite et un plan de l'espace peuvent être soit :
- ...strictement parallèles... ;
- ...la droite incluse dans le plan... ;
- ...sécants (l'intersection est alors un point).



Exemple n°2

Reprendre le cube précédent et donner un exemple pour chaque cas.

1) Deux plans peuvent être soit :
- ...strictement parallèles... : ...(HAB) et (GDC)...
- ...confondus... : ...(HAB) et (BEH)...
- ...sécants... selon une ...droite... :

...(ABE) et (FEH), intersection : (HE).

2) Deux droites *coplanaires* de l'espace peuvent être soit :
- ...strictement parallèles... : ...(GH) et (BC)...
- ...confondues... : ...
- ...sécantes... : ...(BD) et (GD)....

3) Une droite et un plan de l'espace peuvent être soit :
- ...strictement parallèles... : ...(HEB) et (DC)...
- ...inclue dans un plan... : ...(AGF) et (AB)....
- ...sécants... :

...(DHE) et (AG)...

Se tester n°1 - C12.1 (/5)

Objectifs :

	Niveau		a	eca	n
C12.a	1	Savoir visualiser la position relative de droites et de plans.			

Ex.1 **[5 pts +0.5/err.]**

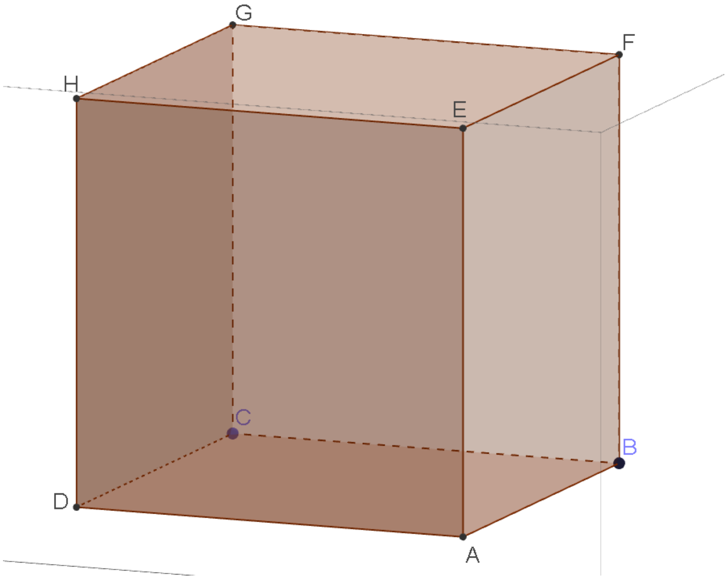
Sur le cube ci-contre, citer :
- deux droites coplanaires :

....
- deux plans strictement parallèles :

....
- deux droites strictement parallèles :

....
- une droite et un plan strictement parallèles :

....

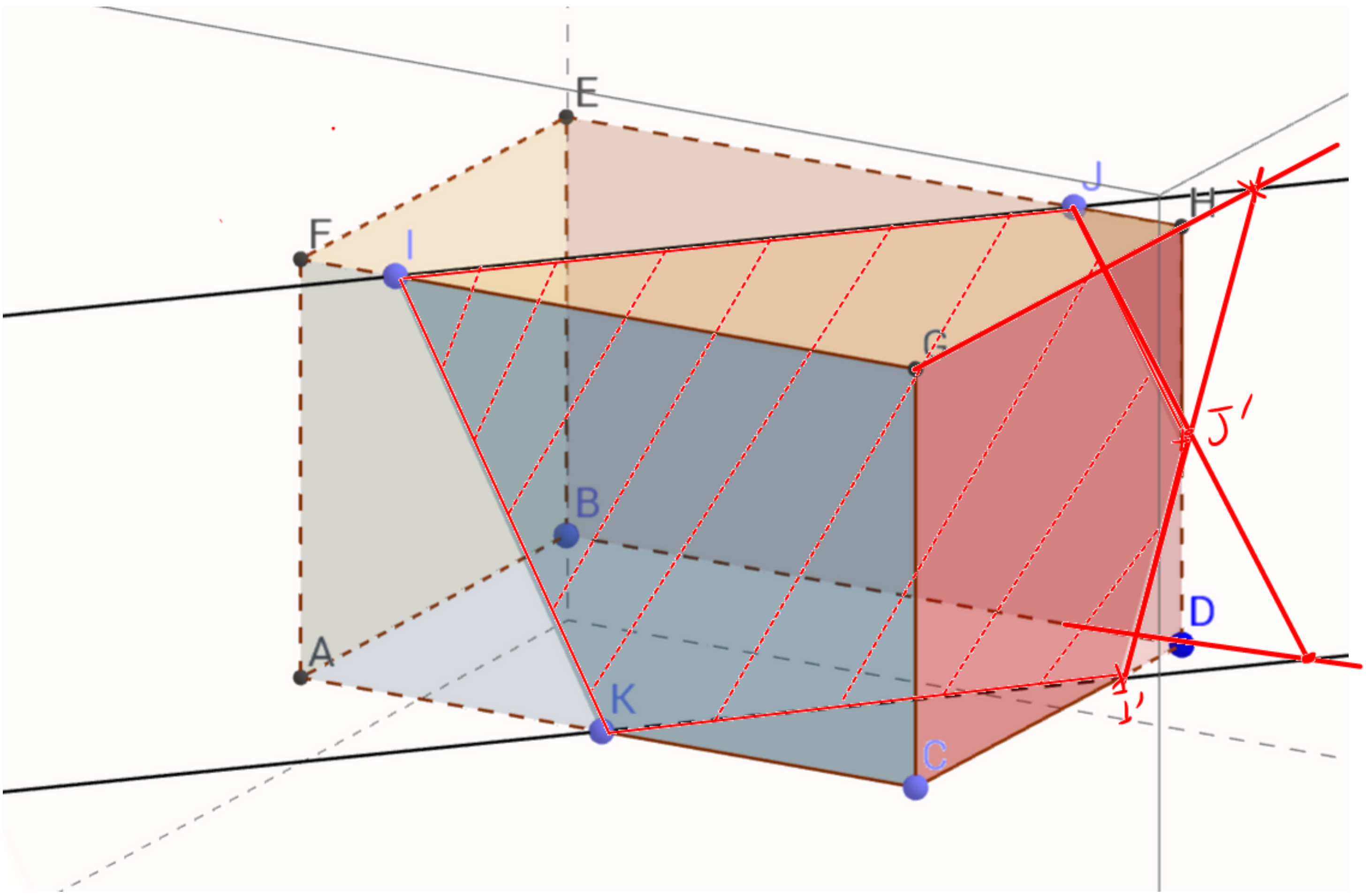


Compléter, et donner un exemple pour chaque cas.

1) Deux plans peuvent être soit :
- .... : ....
- .... : ....
- .... selon une .... :
....

2) Deux droites *coplanaires* de l'espace peuvent être soit :
- .... : ....
- .... : ....
- .... : ....

3) Une droite et un plan de l'espace peuvent être soit :
- .... : ....
- .... : ....
- .... :
....



Indices et résultats

Ex.1 : (GE) et (GA) ; (HEA) et (GFB) ; (GE) et (CA) ; (HEA) et (GB)

1. - Confondus : (HEA) et (HDA) – parallèles : (HEA) et (GFB) – sécants selon une droite : (GHE) et (DHE), selon (HE).

2. - Confondues : (DA) et (DA) – parallèles : (GE) et (CA) – sécantes en un point : (GE) et (GA) en G.

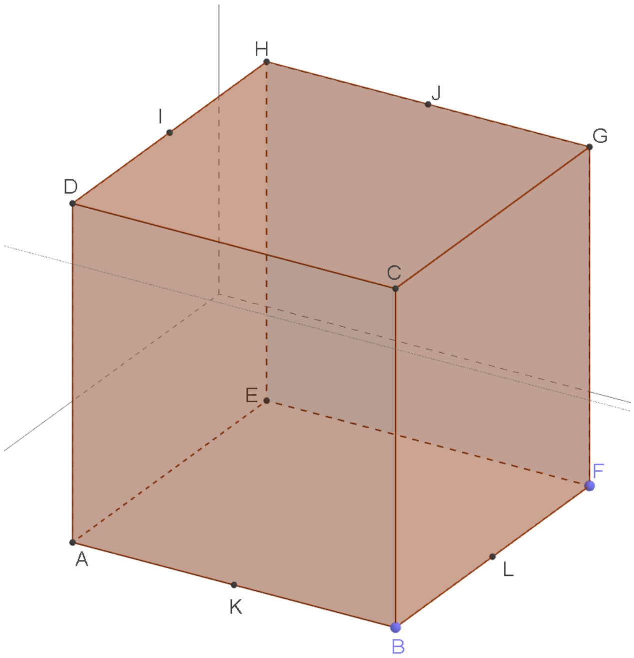
3. Inclue (la droite) dans le plan : (GE) dans (GHE) – parallèles : (GE) et (DCA) – sécants en un point : (GE) et (FEA) en E.

Interrogation n°1

Objectifs :

C12.a_Niv1 : Savoir visualiser la position relative de droites et de plans.

Dans les trois exercices suivants, on utilise le pavé droit suivant, où I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[DH]$, $[HG]$, $[AB]$, et $[BF]$:



Exercice n°1

À chaque fois, sans justifier, donner la position relative des deux droites citées :

1) (DB) et (EF) **2)** (IJ) et (AF) **3)** (IC) et (AB) **4)** (JF) et (EH).

Exercice n°2

À chaque fois, sans justifier, donner la position relative des deux plans cités :

1) (DCG) et (AEF) **2)** (IJA) et (HDC) **3)** (IJE) et (CKL).

Exercice n°3

À chaque fois, sans justifier, donner la position relative de la droite et du plan cité :

1) (IJ) et (ABF) **2)** (IJ) et (BCG)

3) (KE) et (ABF).

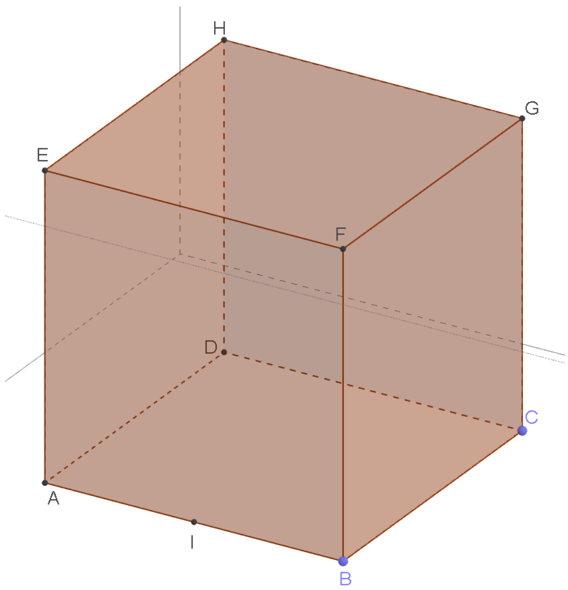
Exercice n°4

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4 cm et I est le milieu de $[AB]$.

Quelle est la nature de la section du cube par (on calculera les dimensions) :

1) le plan (IFG) ?

2) le plan (IFC) ?

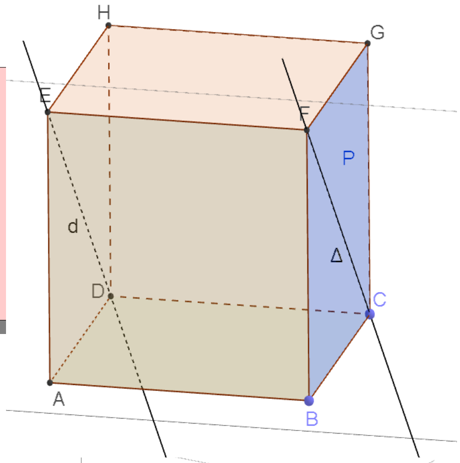


Cours n°2

II) Parallélisme dans l'espace

Remarque : Les quatre premiers théorèmes de ce paragraphe sont admis, le dernier sera démontré dans le chapitre XV.

Théorème n°1



Si une droite (d) est parallèle à une droite (Δ) contenue dans un plan (P), alors la droite (d) est parallèle au plan (P)

$$\left.\begin{array}{l}(d)/\!/(\Delta)\\(\Delta)\subset(P)\end{array}\right\}\Rightarrow(d)/\!/(P)$$

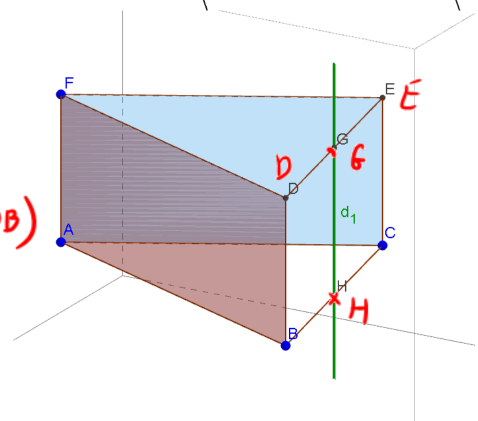
$(\Delta) \subset (P)$

inclue dans

Exemple n°3

Faces latérales rectangulaires

$ABCEFD$ est un prisme droit à base triangulaire. G est le milieu de $[DE]$ et H est le milieu de $[BC]$.
Démontrer que (GH) est parallèle au plan (ABD).

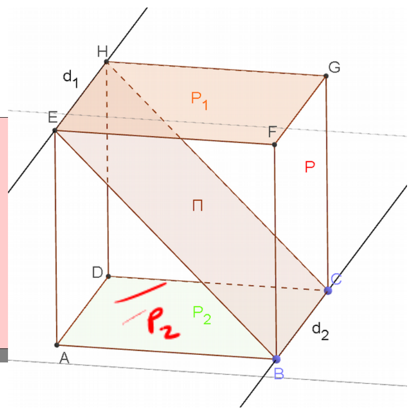


(d) (Δ)

- (GH) est parallèle à (DB) car : G est le milieu de [DE] et H est le milieu de [BC].
- (DB) ⊂ (ADB) car : D ∈ (ADB) et B ∈ (ADB)

Donc (GH) est parallèle à (ADB).

#Théorème n°2 (théorème du plancher et du plafond)



Si deux plans (P_1) et (P_2) sont parallèles, alors tout plan Π qui coupe (P_1), coupe (P_2) et les intersections sont deux droites parallèles

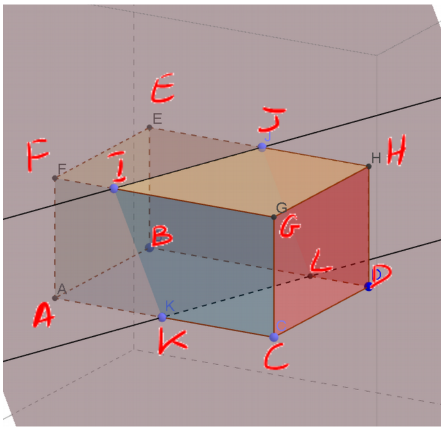
$$\left.\begin{array}{l}(P_1)/\!/(P_2)\\(\Pi)\cap(P_1)=(d_1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(\Pi)\cap(P_2)=(d_2)\\(d_1)/\!/(d_2)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}(P_1)\,//\,(P_2)\\(\Pi)\cap(P_1)=(d_1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(\Pi)\cap(P_2)=(d_2)\\(d_1)\,//\,(d_2)\end{array}\right.$$

Exemple n°4

$ABDCHEFG$ est un pavé droit. I est un point de $[FG]$ et J est un point de $[EH]$. K est un point de $[AC]$. L est le point d'intersection du plan (IJK) avec (BD). Démontrer que (KL) et (IJ) sont parallèles.

$(P_1) \to (EFG)$ ABDCHEFG est un pavé droit, donc
$(P_2) \to (ABC)$ • (EFG) et (ABC) sont parallèles.
$(\Pi) \to (KIJ)$ • $(EFG) \cap (KIJ) = (IJ)$ car :
$\to I \in [FG]$, donc $I \in (EFG)$.
$\to J \in [EH]$, donc $J \in (EFG)$
Donc $(IJ) \subset (EFG)$.
$\to I \in (IJK)$, $J \in (IJK)$
Donc $(IJ) \subset (IJK)$
• $(ABC) \cap (KIJ) = (KL)$ car :
$\to K \in (AC)$, donc $K \in (ABC)$
$\to L \in (BD)$, donc $L \in (ABC)$
Donc $(KL) \subset (ABC)$
$\to K \in (IJK)$, $L \in (IJK)$. Donc $(KL) \subset (IJK)$
• Donc (KL) et (IJ) sont parallèles.



Méthode n°1:

*** Comment construire l'intersection d'un plan et d'une droite sécante à ce plan ?**

1) On cherche un point? Une droite ? Un plan ? Un polygone ? un point
2) Trouver une droite du plan qui est sécante avec la droite initiale.

Méthode n°2 :

*** Comment construire l'intersection de deux plans sécants ?**

1) On cherche un point?une droite ? Un plan ? Un polygone ? une droite
2) Chercher un point à l'aide de deux droites sécantes se trouvant chacune dans un des deux plan
3) Réitérer l'opération si possible avec un autre point
4) Si on n'arrive pas à avoir d'autre point, penser au théorème du toit, ou bien au théorème du « plafond et du plancher ».

Méthode n°3

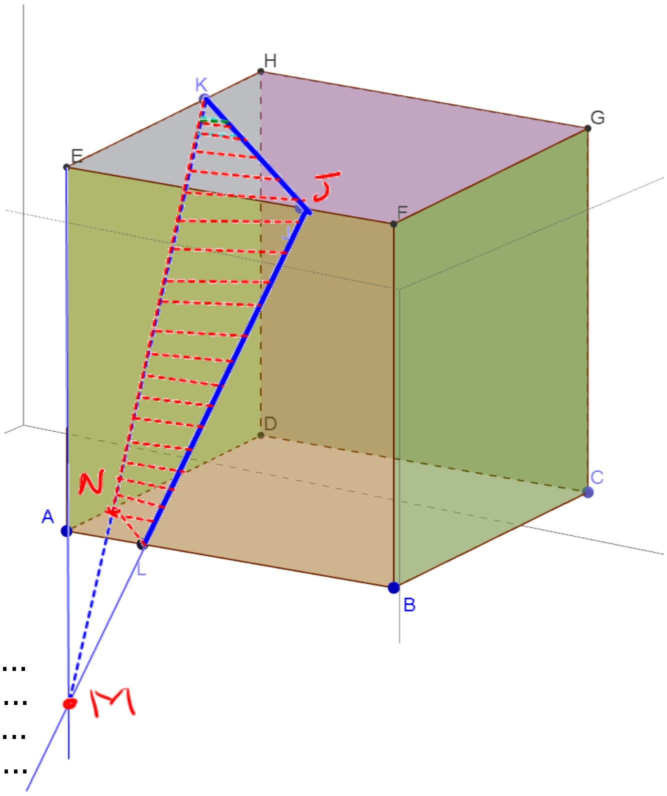
*** Comment construire l'intersection d'un polyèdre par un plan ?**

1) On cherche un point?une droite ? Un plan ? Un polygone ? un polygone
2) Placer les points connus d'intersection du plan et du polyèdre.
3) Prolonger éventuellement les arêtes.
4) Repérer des faces qui sont parallèles pour tracer des intersections parallèles.
5) Si on n'arrive pas à avoir d'autre point, penser au théorème du toit, ou bien au théorème du « plafond et du plancher ».

6) Faire le tour du polyèdre.

Exemple n°5

Construire la section du cube ci-contre par le plan (LJK). On demande de justifier chaque pas de la construction.



Justification :

. (JL) et (AE) sont coplanaires, et se coupent donc en M.

$M \in (AE)$ et $(AE) \subset (AEH)$

Donc $M \in (AEH)$

$M \in (JL)$ donc $M \in (KJL)$.

Donc $M \in (KJL) \cap (AEH)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Se tester n°2 - C12.2 (/9)

Objectifs :

	Niveau		a	eca	n
C12.b	1	Savoir étudier la position relative de droites et de plans (parallélisme).			

Ex.1 [2 pts]

$XKIHAF$ est un prisme droit à bases triangulaires XKI et HAF, $[XH]$ étant une arête, $XKAH$ une face latérale. G' est le milieu de $[HA]$ et H' est le milieu de $[XK]$. Démontrer que $(G'H')$ est parallèle au plan (XIH).

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ex.2 [2 pts]

$LTGDENSB$ est un pavé droit de bases $LTGD$ et $ENSB$, $[¿]$ étant une arête. I' est un point de $[SB]$ et J' est un point de $[EN]$. K' est un point de $[¿]$. L' est le point d'intersection du plan (IJK) avec (GD). Démontrer que $(K'L')$ et $(I'J')$ sont parallèles.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ex.3 [5 pts]

Dessiner un cube $UCRPOVJM$ de bases $UCRP$ et $OVJM$, $[UO]$ étant une arête, en perspective cavalière.

Placer l' sur $[UC]$ tel que $UI' = \frac{1}{3}UC$.

Placer J' sur $[OV]$ tel que $OJ' = \frac{2}{3}OV$.

Placer K' sur $[OM]$ tel que $OK' = \frac{2}{3}OM$.

Construire la section du cube par le plan $(I'J'K')$. On demande de justifier au moins un pas de la construction.

Justification :

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Indices et résultats

Ex.1 : *Indications : utiliser le théorème n°1 avec le plan (XIH) et la droite (XH) contenue dans ce plan.*

Ex.2 : *Indications : utiliser le théorème n°2 avec les plans parallèles (LTG) et (ENS) et le plan oblique $(I'J'K')$.*

Ex.3 : *Indications : voir l'exemple n°5. Construire un point d'intersection de $(I'J')$ et de ¿15 (¿19) (il faut justifier qu'il existe en précisant que les deux droites $(I'J')$ et ¿15 (¿19) sont dans un même plan).*

Interrogation n°2

Objectifs :

C12.b_Niv1 : Savoir étudier la position relative de droites et de plans (parallélisme, orthogonalité).

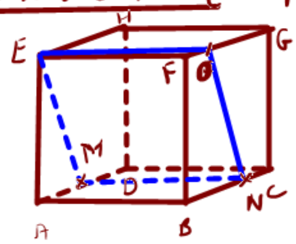
Exercice n°5

Ex.2 p.244

Exercice n°6

Ex.11 p.244

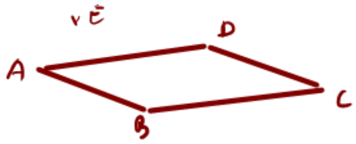
Correction de l'ex. n°5 : (n°2 p.244)



Justification : ABCDEFGH est un cube, donc les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.

- E ∈ (EFG), et E ∈ (EMN)
  Soit O l'intersection du plan (EMN) et de (FG).
  O ∈ (EFG) et O ∈ (EMN)
  Donc (EO) est la droite d'intersection de (EFG) et (EMN)
- M ∈ (ABC) (car M ∈ (AD) et (AD) ⊂ (ABC))
  M ∈ (EMN)
  N ∈ (ABC) (car N ∈ (BC) et (BC) ⊂ (ABC))
  Donc (MN) est la droite d'intersection de (EFG) et (ABC)
- Donc les plans parallèles (EFG) et (ABC) sont coupés par un plan sécant (EMN), dont les deux intersections (EO) et (MN) sont parallèles.

Correction de l'ex. n°6 (n°11 p.244)



1) . (BC) ⊂ (EBC) donc (BC) // (EBC)
. (BC) // (AD) car ABCD est un parallélogramme,
donc (BC) // (AED) (car (AD) ⊂ (AED)).

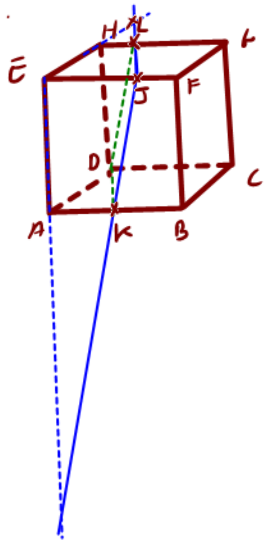
2) E ∈ (BEC) et E ∈ (AED).
Donc (BEC) ∩ (AED) contient E.

(BC) // (AD)
(BC) ⊂ (EBC)
(AD) ⊂ (AED)

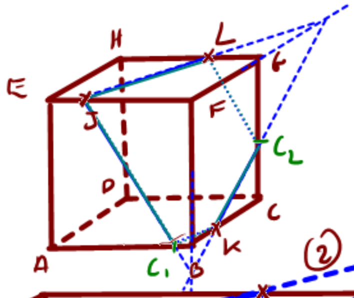
d'après le théorème du toit, l'intersection de (EBC) et (AED) est parallèle à (AD) et (BC).

Donc l'intersection de (BEC) et (AED) est la parallèle à (AD) passant par E.

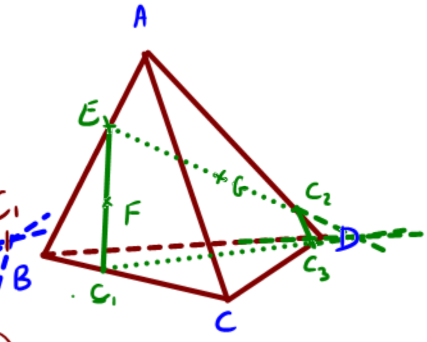
Correction de l'ex. n°7 (52 p.247) / n°8 (53 p.247) / n°9 (54 p.247)



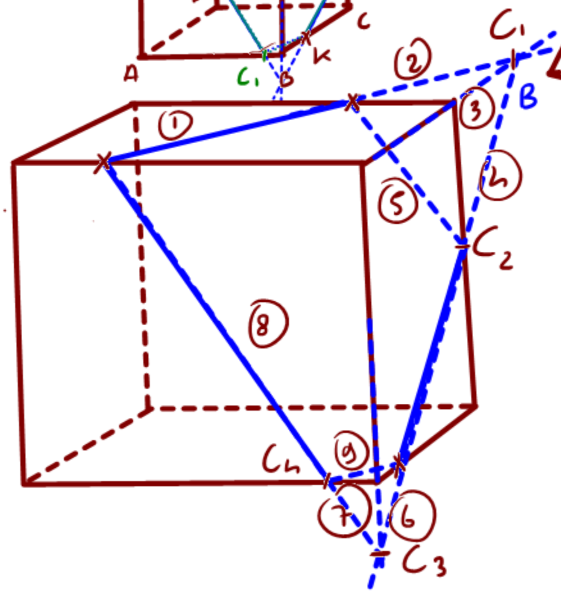
E
H
L
J
F
D
C
A
K
B



H
L
E
J
F
D
C
A
B
K



A
E
G
F
D
C
B



1
2
3
4
5
6
7
8
9

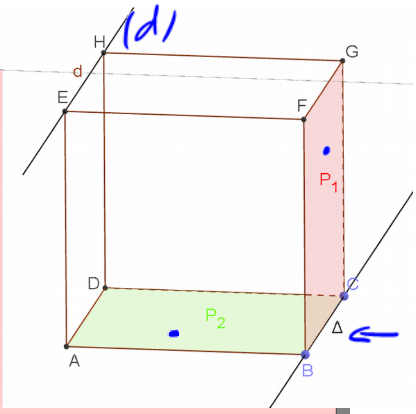
Cours n°3

Théorème n°3

Si une droite (d) est parallèle à deux plans (P_1) et (P_2) sécants suivants une droite (Δ), alors, (d) est ..parallèle.... ...à..Δ...

....

$$\left.\begin{array}{l}(d)\,//\,(P_1)\\(d)\,//\,(P_2)\\(P_1)\cap(P_2)=(\Delta)\end{array}\right\}\Rightarrow(d)\,//\,(\Delta)$$

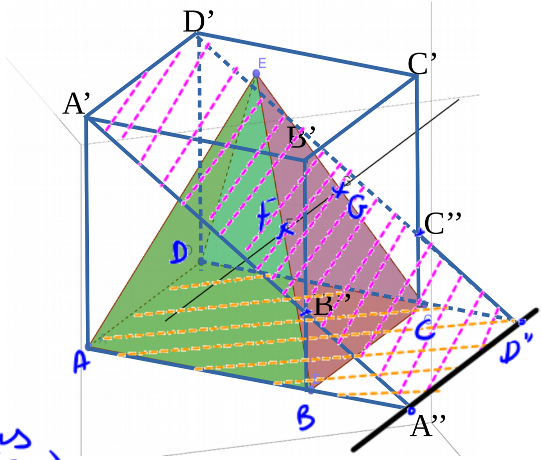


Exemple n°6

$ABCDE$ est une pyramide régulière à base carrée de sommet E. G et F sont les milieux respectifs de $[EC]$ et $[EB]$. $A'B'C'D'ABCD$ est un pavé droit. B'' est un point de $[BB']$. $(B''C'')$ est parallèle à $(A'D')$.
$(A''D'')$ est l'intersection des plans $(A'D'C''B'')$ et $(ABCD)$.

C'' est un point de [CC']

1. Démontrer que (GF) est parallèle à (BC).

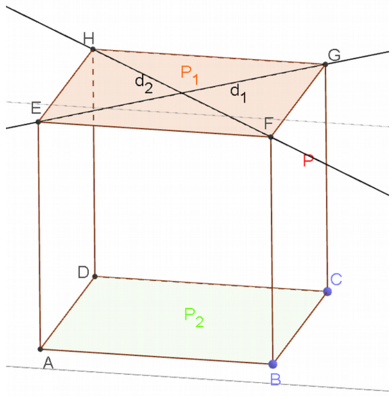


. F est le milieu de [EB]
. G est le milieu de [EC]
D'après le théorème de la droite des milieux, (FG) est parallèle à (BC)

D''

$$\left.\begin{array}{l}(d)\,//\,(P_1)\\(d)\,//\,(P_2)\\(P_1)\cap(P_2)=\Delta\end{array}\right\}(d)\,//\,\Delta.$$

2. Démontrer que (GF) et $(A''D'')$ sont parallèles.



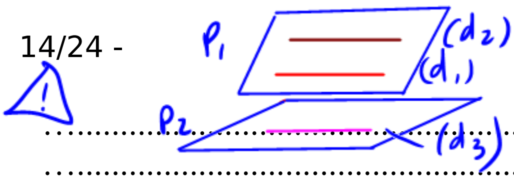
$P_1 \to (A'A''D'')$ ~~$(P_1) \to (BB'C')$~~ $P_2 \to (ABC)$ $(d) \to (GF)$
$P_1 \cap P_2 \to$ ~~(BC)~~ $(A''D'')$

• $(GF)\,//\,(BC)$
$(BC)\,//\,(A'D')$ car $ABCDA'B'C'D'$ est un pavé droit.
Donc $(GF)\,//\,(A'D')$.
Donc $(GF)\,//\,(A'A''D'')$

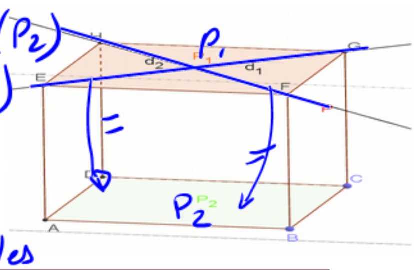
• $(GF)\,//\,(BC)$, donc $(GF)\,//\,(ABC)=(AA''D'')$

. Donc $(GF)\,//\,(AA''D'')\cap(A'A''D'')=(A''D'')$.

Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.



$(d_1) // (d_3) \Rightarrow (d_1) // (P_2)$
$(d_2) // (d_3) \Rightarrow (d_2) // (P_2)$



……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

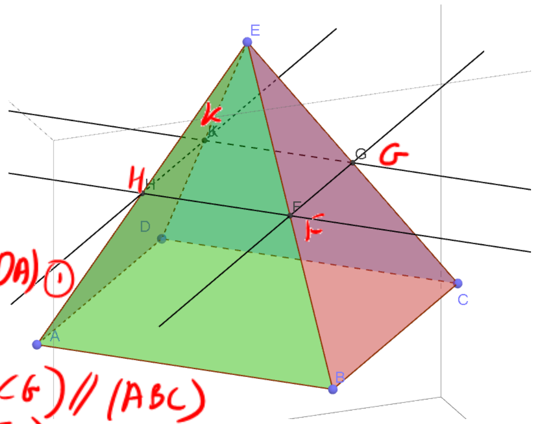
Théorème n°4

Si un plan (P_1) contient deux droites (d_1) et (d_2) sécantes entre elles et parallèles à un plan (P_2), alors, (P_1) est …parallèles…………………… à (P_2).

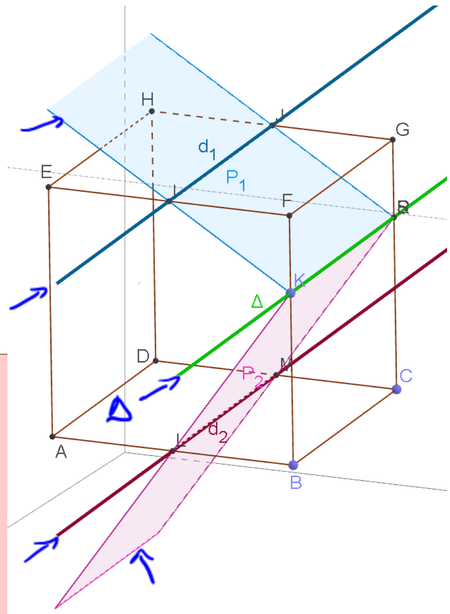
$$\left.\begin{array}{l}(d_1)\subset(P_1)\ et\ (d_1)//(P_2)\\ (d_2)\subset(P_1)\ et\ (d_2)//(P_2)\\ \quad (d_1)\nparallel(d_2)\end{array}\right\}\Rightarrow (P_1)//(P_2)$$

Exemple n°7

ABCDE est une pyramide régulière à base carrée de sommet *E*. *G,F,H* et *K* sont les milieux respectifs de [*EC*],[*EB*], [*EA*] et [*ED*]. Démontrer que le plan *GFHK* est parallèle au plan *ABCD*.



• K est le milieu de [ED] et H est le milieu de [EA], donc (KH) est parallèle à (DA) ①
• De même, (KG) est parallèle à (DC) ②
→ D'après ①, (KH)//(ABC) et d'après ② (KG)//(ABC)
→ • De plus (KG) ⊂ (HFG) et (KH) ⊂ (HFG)
→ • Enfin, (KG) et (KH) sont sécantes en K.
Conclusion : (HKG) et (ABC) sont parallèles.
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………



Théorème n°5 (théorème du toit)

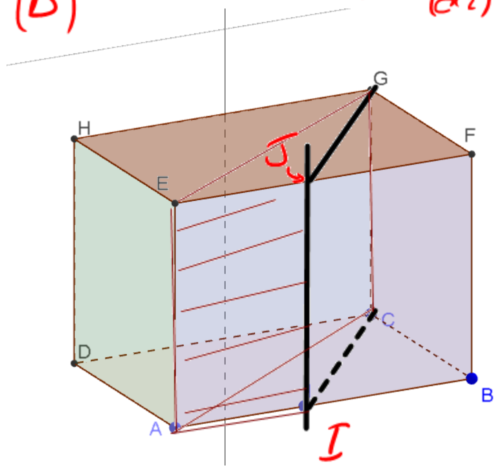
Soient (d_1) et (d_2) sont deux droites parallèles, respectivement contenues dans deux plans (P_1) et (P_2) . Si (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ), alors (Δ) est …parallèle à (d_1) et (d_2)……………………………

$$\left.\begin{array}{r}(d_1)//(d_2)\\ (d_1)\subset(P_1)\\ (d_2)\subset(P_2)\\ (P_1)\cap(P_2)=\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(\Delta)//(d_1)\\ (\Delta)//(d_2)\end{array}\right.$$

$(d_1) \,//\, (d_2)$ $(d_1) \subset (P_1)$ $(d_2) \subset (P_2)$ $(P_1) \cap (P_2) = (D)$ $\Rightarrow (d_1) // (D)$, $(d_2) // (D)$

Exemple n°8

ABCDHEFG est un pavé droit. *I* est un point de [*AB*].
Montrer que la droite d'intersection du plan (*GIC*) et du plan (*EAF*) est parallèle à (*GC*).



Recherche :
$(d_1) \to (AE)$ $(P_1) \to (EAF)$
$(d_2) \to (GC)$ $(P_2) \to (GIC)$
$(D) \to (IJ)$

• $(AE) // (GC)$ car $(AE)//(FB)$, $(GC)//(FB)$, ABFE et FBCG sont des rectangles (pavé droit)
• $(AE) \subset (EAF)$ et $(GC) \subset (GIC)$
• (EAF) et (GIC) sont sécants selon (IJ) car $I \in (AB) \subset (AEF)$
Donc, d'après le théorème du toit : $(IJ) // (GC)$.

Se tester n°3 - C12.3 (/8)

Objectifs :

	Niveau		a	eca	n
C12.b	1	Savoir étudier la position relative de droites et de plans (parallélisme).			

Ex.1 **[2 pts]**

QKXDW est une pyramide régulière à base carrée de sommet W. G' et F' sont les milieux respectifs de $[WK]$ et de $[WX]$.
Démontrer que $(G'F')$ est parallèle à (QD).

....
....
....
....
....

Ex.2 **[3 pts]**

$LHASM$ est une pyramide régulière à base carrée de sommet M. G',F',H' et K' sont les milieux respectifs de $[ML]$, $[MH]$, $[MA]$ et de $[MS]$. Démontrer que le plan $(G'F'H'K')$ est parallèle au plan $(LHAS)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ex.3 **[3 pts]**

$RZOGVEFI$ est un pavé droit de bases $(RZOG)$ et $(VEFI)$, $[RV]$ étant une arête. I' est un point de $[RZ]$. Montrer que l'intersection des plans $(FI'O)$ et (VRE) est parallèle à (GI).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Indices et résultats

Cf les exemples du cours.

Interrogation n°3

Objectifs :

C12.b_Niv1 : Savoir étudier la position relative de droites et de plans (parallélisme).

Exercice n°7

Ex.52 p.247

Exercice n°8

Ex.53 p.247

Cours n°4

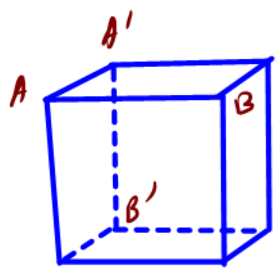
III) Orthogonalité dans l'espace

(AD) et (BF) sont orthogonales mais pas perp.

Définition n°3 : orthogonalité

Deux droites (d_1) et (d_2) sont dites **orthogonales** dans l'espace si leurs parallèles passant par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.
On note $(d_1) \perp (d_2)$.

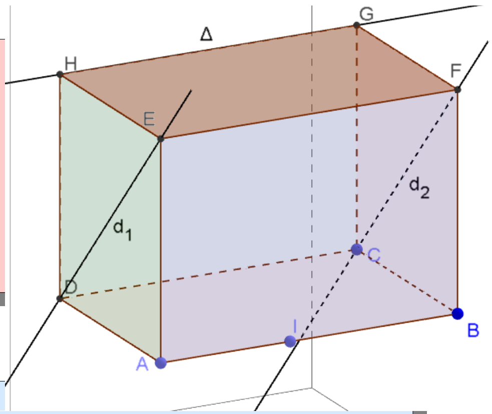
Définition n°4 : perpendicularité dans l 'espace



(A'B') et (AB) sont orthogonale, mais pas perpendiculaires

Une droite (d) est perpendiculaire à un plan (P), si elle est …orthogonale… à deux droites …sécantes… de (P).

Théorème n°6



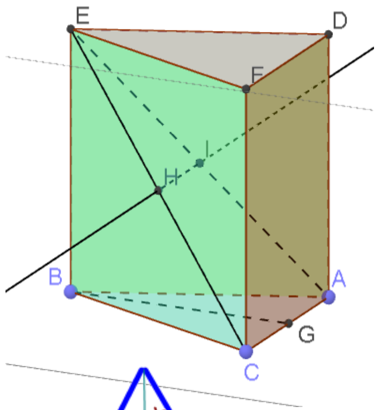
Si deux droites de l'espace sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est …orthogonale à l'autre…
……………………………………………………………

$$\left.\begin{array}{l}(d_1) /\!/ (d_2)\\(d_1) \perp (\Delta)\end{array}\right\} \Rightarrow (d_2) \perp (\Delta)$$

Démonstration

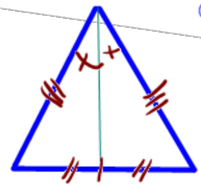
(d_1) et (d_2) sont parallèles. Soit (Δ) une droite orthogonale à (d_1) et P un point de l'espace.
Alors, d'après la définition, la parallèle (Δ') à (Δ) passant par P est
……………………………………………… à la parallèle (d_1') à (d_1) passant par P.
Soit (d_2') la parallèle à (d_2) passant par P. (d_2') est ……………………………… à (d_1') .
Donc (Δ') est aussi …………………………………… à (d_2'). Donc (Δ) est, par définition, ………………………………… à …..

Exemple n°9

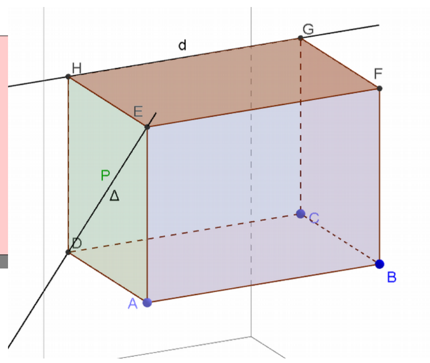


$ABCFDE$ est un prisme droit de base un triangle isocèle en B. H, I et G sont les milieux respectifs de $[EC]$,$[EA]$ et $[AC]$.
Démontrer que (HI) est orthogonale à (BG).

…CBA est isocèle en B. Donc (BG) et (AC) sont perpendiculaires* Donc (BG) et (AC) sont ortho-gonales.
*car G est le milieu de [AC]
…Dans ECA, H est le milieu de [EC] et I le milieu de [EA]. Donc (HI) et (AC) sont parallèles.
……………………………………………………………
…Donc (HI) est orthogonale à (BG).
……………………………………………………………



Théorème n°7



Toute droite (d) perpendiculaire à un plan (P) est …orthogonale… à toute …droite… de …ce plan (P)

$$\left.\begin{array}{l}(d) \perp (P)\\(\Delta) \subset (P)\end{array}\right\} \Rightarrow (d) \perp (\Delta)$$

Démonstration

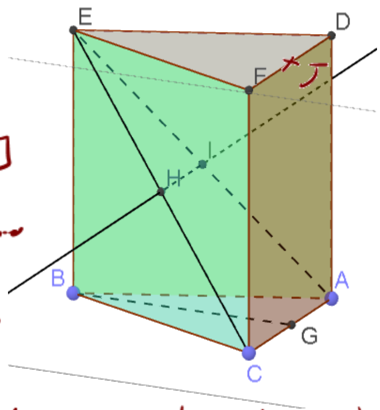
Voir chapitre XV

Exemple n°10

On reprend l'exemple n°9.
1) Démontrer que (HI) est orthogonale à (EG).
2) En déduire que (HI) est perpendiculaire à (EBG).
3) Soit J le milieu de $[FD]$. Déduire de ce qui précède que (HI) est orthogonale à (BJ).

- Bissectrice : coupe l'angle en 2 parts égales
- Hauteur : passe par un sommet et est ⊥ au côté opposé.
- Médiane : passe par un sommet et le milieu du côté opposé
- Médiatrice : passe par le milieu d'un segment, perpendiculaire à ce segment.

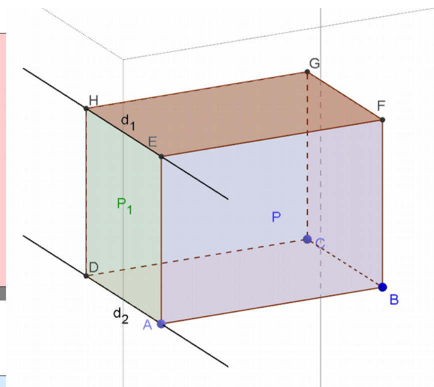
1) Le prisme étant droit, EBC et EBA sont rectangles en B.
De plus, $BC = BA$ (BCA est isocèle en B)
Donc $EB^2 + BC^2 = EB^2 + BA^2$
Donc $EC^2 = EA^2$
Donc ECA est isocèle en E.
H est le milieu de $[EC]$ et I est le milieu de $[EA]$
donc (HI) et (AC) sont parallèles (1)
ECA étant isocèle en E, (EG) est perpendiculaire à (AC) (2)
D'après (1) et (2), (HI) est orthogonal à (EG).
2) On a démontré dans l'exemple n°9, que (HI) est orthogonal à (BG)
Donc (HI) est orthogonal à 2 droites sécantes du plan (EBG)
Donc (HI) est orthogonal à (EBG)
3) J est le milieu de $[FD]$
Il faut démontrer que $J \in (EBG)$
G est le milieu de $[CA]$, donc, dans le rectangle $CADF$, $(JG)//(FC)$.
$BCAEFD$ étant un prisme droit, $EBCF$ est un rectangle, donc $(FC)//(EB)$
Donc $(JG)//(EB)$. Donc $(JG) \subset (EBG)$, Donc $J \in (EBG)$
Donc $(BJ) \subset (EBG)$ Donc (HI) est orthogonale à (BJ).



Théorème n°8

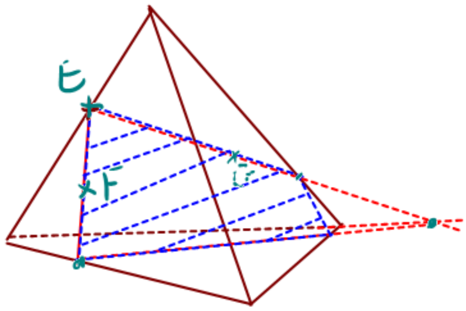
Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est ....perpendiculaire.... à l'autre.

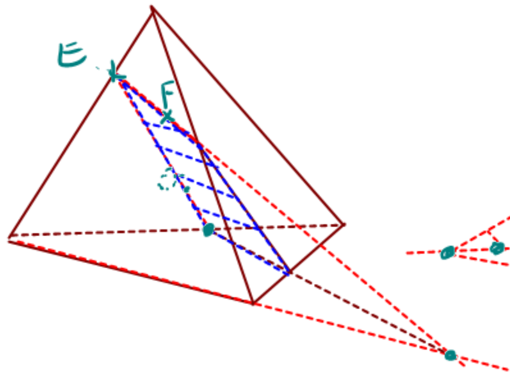
$$\left.\begin{matrix}(d_1)//(d_2)\\(d_1)\perp(P)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(d_2)\perp(P)$$

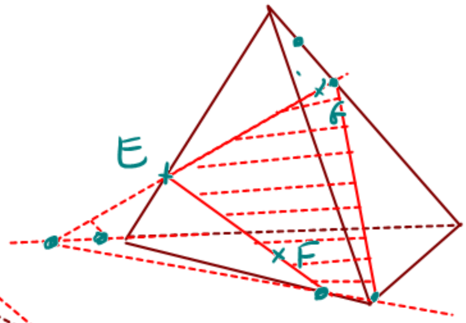


Démonstration

(d_1) et (d_2) sont parallèles. (d_1) est perpendiculaire au plan (P).
Donc il existe deux droites .... (d_1') et (d_1'') de (P) telles que ....
D'après le théorème n°6, (d_2) est aussi .... à .... et ....
Donc ....


E
F
G


E
F
G

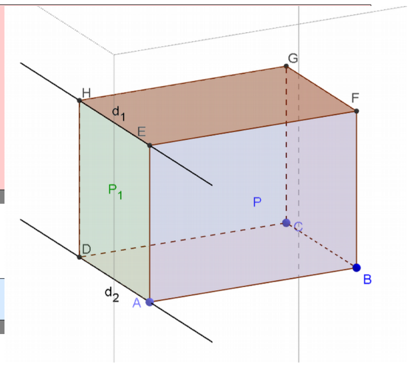

E
F
G

"i.e." : id est : c'est à dire.

Théorème n°9

Si deux droites sont perpendiculaires au même plan, alors elles sont ...parallèles entre elles...

$$\left.\begin{array}{l}(d_1)\perp(P)\\(d_2)\perp(P)\end{array}\right\}\Rightarrow(d_1)//(d_2)$$



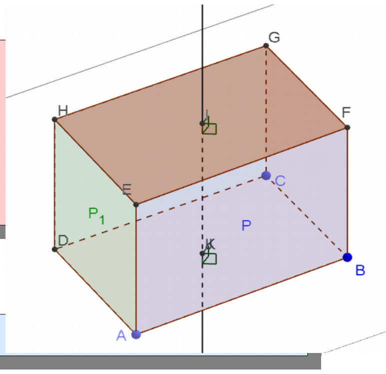
Démonstration

Voir chapitre XV

Théorème n°10

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un est ...perpendiculaire à l'autre.......

$$\left.\begin{array}{l}(P_1)//(P_2)\\(d)\perp(P_1)\end{array}\right\}\Rightarrow(d)\perp(P_2)$$



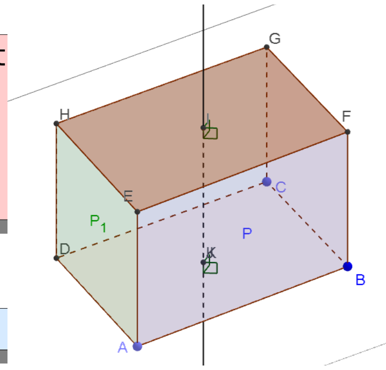
Démonstration

Voir chapitre XV

Théorème n°11

Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont .parallèles entre eux..........................

$$\left.\begin{array}{l}(d)\perp(P_2)\\(d)\perp(P_1)\end{array}\right\}\Rightarrow(P_1)//(P_2)$$



Démonstration

Voir chapitre XV

Définition n°5 : plan médiateur

Soit A et B deux points de l'espace. Le plan **médiateur** de $[AB]$ est l'ensemble de tous les points .situés à égale distance....... des extrémités du segment $[AB]$.

Théorème n°12

Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ passe par le ...milieu............. de ce segment et est ......perpendiculaire............................ à (AB).

Interrogation n°4

Objectifs :

C12.c_Niv1 : Savoir étudier la position relative de droites et de plans (orthogonalité).

Exercice n°9

Ex.54 p.247

Exercice n°10

→ Un ex. type bac le mercredi.
→ Explication du cours puis temps pour recopier
→ Correction davantage collective de temps en temps.

Ex.61 p.247

Exercice n°11*

$ABCDE$ est une pyramide de base $BCDE$ qui est un parallélogramme. Faire un croquis de la situation et construire l'intersection entre les plans (ABC) et (ADE). Justifier la construction à l'aide d'une démonstration.

Exercice n°12***

Ex.62 p.247

→ Circuler pour aider quand on a fini
→ Validation de cours à la volée

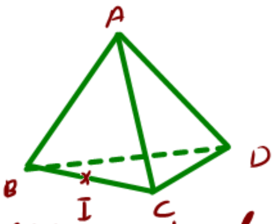
Exercice n°13*

Ex.37 p.246

Exercice n°14**

Ex.40 p.246

Ex. n°10 (61 p.247). Correction

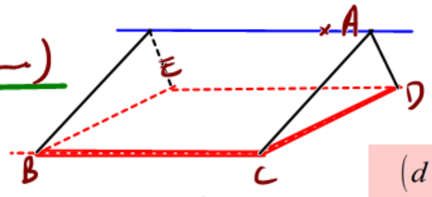


$(BC) \perp (IAD)$?

On montre que (BC) est orthogonale à 2 droites du plan (IAD) :

- ABCD est un tétraèdre régulier, donc ABC est un triangle équilatéral. Donc la médiane issue de A dans ce triangle est aussi une hauteur. Donc (IA) et (BC) sont perpendiculaires.
- ABCD est un tétraèdre régulier, donc BCD est un triangle équilatéral. Donc (ID) et (BC) sont perpendiculaires (même raisonnement)
- Or $(ID) \subset (IAD)$ et $(IA) \subset (IAD)$. De plus $D \neq A$. Donc (ID) et (IA) sont sécantes.

Donc (BC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (IAD).
Donc (BC) est orthogonale à (IAD)

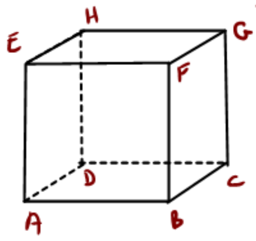


Ex. n°11 (pyramide à base un parallélogramme)

- (BC) et (ED) sont parallèles car BCDE est un parallélogramme.
- $(BC) \subset (ABC)$
- $(ED) \subset (AED)$
- $(ABC) \cap (AED)$ contient A.

donc la droite d'intersection de (ABC) et (AED) passe par A et est parallèle à (BC) et (ED).

$$\left.\begin{array}{l}(d_1)//(d_2)\\(d_1)\subset(P_1)\\(d_2)\subset(P_2)\\(P_1)\cap(P_2)=\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(\Delta)//(d_1)\\(\Delta)//(d_2)\end{array}\right.$$



Ex. n°12 (62 p.247)

1.) BFGC est un carré, donc
$(BF) \perp (BC)$
BFEA est un carré, donc
$(BF) \perp (AC)$

(ABC)

(BF) est donc perpendiculaire à 2 droites du plan, donc est orthogonal à (ABC)

2.) a) ABCD est un carré, donc un losange. Donc ses diagonales sont perpendiculaires. Donc (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

b). $(AC) \perp (BD)$ (cf a.) ①

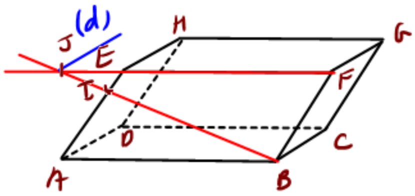
. $EC = AG$: les diagonales de EGCA sont de même longueur } EGCA est un rectangle.
$(EG)//(AC)$
Donc $(AC) \perp (GC)$.

Or $(GC)//(FB)$ car FBCG est un carré.
Donc (AC) est orthogonal à (BF) ②
D'après ① et ②, (AC) est perpendiculaire au plan $(DBF) = (BDH)$

3°). BCGF est un carré donc un losange. Donc (BG) ⊥ (FC). ①
· FD = EC et (FC) // (ED) donc FCDE est un rectangle. Donc (FC) ⊥ (FE)
· EFGH est un carré donc (EF) // (GH). Donc (FC) ⊥ (GH) ② Donc, d'après ① et ②, (FC) est perpendiculaire au plan (BHG).

4°) (BH) ⊂ (BHG) et (FC) ⊥ (BHG), donc (FC) ⊥ (BH).
(BH) ⊂ (BDH) et (AC) ⊥ (BDH), donc (AC) ⊥ (BH) } (BH) ⊥ (AFC).

Ex. n° 13 (37 p. 246)



1. E, F, B et I sont dans un même plan supporté par la face ABFE.
De plus (BI) et (EF) ne sont pas parallèles.
Donc (BI) et (EF) sont coplanaires et sécantes.

2. (d) est parallèle à (FG).
BCGF est un parallélogramme, donc (FG) // (BC)
Donc (d) // (BC). Donc (d) // (ABC).

Ex. n° 14 (40 p. 246)

1. ABFE est un carré, donc (AB) // (FE). Donc (AB) // (EFG)
2. (AB) ⊂ (AIB).
(EF) ⊂ (EFG) } donc (AIB) ∩ (EFG) est parallèle à (AB) et (EF) (théorème du toit)
(AB) // (EF).
Donc (AIB) ∩ (EFG) = (IL)
3. - Les plans (EAD) et (BCG) sont parallèles.
- Ils sont coupés par un plan (AIB). Donc (EAD) ∩ (AIB) // (BCG) ∩ (AIB).
Donc (AI) // (BL).

4. Dans EHF, (IJ) est la droite des milieux, et est donc parallèle à (HF). } (IJ) // (KL)
De même (KL) // (HF).
Donc on a : (IJ) // (KL)
(AI) // (BL) } donc (AIJ) // (BKL)

Indices et résultats

Ex.n°1 : ***Dans le désordre :*** Non coplanaires, non parallèles. Coplanaires, sécantes. Coplanaires, strictement parallèles. Non coplanaires, non parallèles.

Ex.n°2 : ***Dans le désordre :*** Parallèles. *S*trictement parallèles. Sécants.

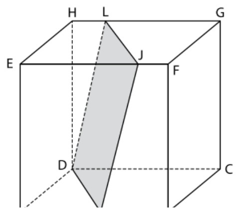
Ex.n°3 : ***Dans le désordre :***Sécants. Inclus. Strictement parallèle

Ex.n°4 : Un rectangle (mais pas un carré). Un triangle isocèle en I (mais pas équilatéral).

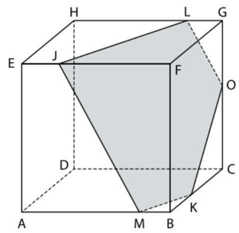
Ex.n°5 (Ex.2 p.244) : (MN).

Ex.n°6 (Ex.11 p.244) : **1.** (BC) est parallèle à (AD), et (AD) est incluse dans (ADE), donc.... **2.** la parallèle à .... passant par E.

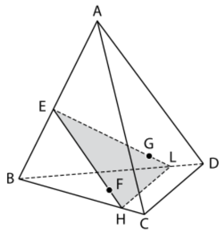
Ex.n°7 (Ex.52 p.247) :



Ex.n°8 (Ex.53 p.247) :



Ex.n°9 (Ex.54 p.247) :



Ex.n°10 (Ex.61 p.247) : *Prouver que (BC) est orthogonale à deux droites du plan.*

Ex.n°11* : *Justification : utiliser le théorème du toit..*

Ex.n°12*** (Ex.62 p.247) : **1.***Prouver que (BF) est orthogonale à deux droites d'un plan.* **2.a.** *Propriétés d'un losange.* **2.b.** *Prouver que (AC) est orthogonale à deux droites du plan (BDH).* **3.** *(CF) est orthogonale à (HG) et perpendiculaire à (BG)...* **4.** *(BH) est incluse dans (BDH) et (AC) est perpendiculaire à (BDH) .... De même, (CF) est perpendiculaire à $BHG)$....*

Ex.n°13* (Ex.37 p.246) : **1.** *B n'appartient pas au plan (EFG)....* **2.** *(FG) est parallèle au plan (ABC)....*

Ex.n°14** (Ex.40 p.246) : **1.***(AB) est parallèle à (EF) et ....* **2.***(IL)* **3.** *Un plan coupant deux plans parallèles....* **4.** *Prouver que (IJ) et (KL) sont parallèles. Prouver que (AI) est aussi parallèle au plan (KLB). Conclure.*

Rayez les lignes inutiles. ***Si un cours n'est pas validé***, ***NE PAS FAIRE de travail au-delà.(vous ne serez PAS pénalisé)***

*Date **d'aujourd'hui** : ....*

Nom, **prénom** et classe :

…..

* Je veux **repasser** les **interrogations** :

C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__

* **Travail personnel** (**4 travaux min.**, sf exception ou mot daté et signé) pour la prochaine fois :

Se tester C__.__ : ex.n° : … / … / … / … | **Chap.n°__**

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Activ. n°__ : Quest.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Cours n°__ : Exempl.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Rayez les lignes inutiles. ***Si un cours n'est pas validé***, ***NE PAS FAIRE de travail au-delà.(vous ne serez PAS pénalisé)***

*Date **d'aujourd'hui** : ....*

Nom, **prénom** et classe :

…..

* Je veux **repasser** les **interrogations** :

C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__

* **Travail personnel** (**4 travaux min.**, sf exception ou mot daté et signé) pour la prochaine fois :

Se tester C__.__ : ex.n° : … / … / … / … | **Chap.n°__**

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Activ. n°__ : Quest.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Cours n°__ : Exempl.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Rayez les lignes inutiles. ***Si un cours n'est pas validé***, ***NE PAS FAIRE de travail au-delà.(vous ne serez PAS pénalisé)***

*Date **d'aujourd'hui** : ....*

Nom, **prénom** et classe :

…..

* Je veux **repasser** les **interrogations** :

C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__

* **Travail personnel** (**4 travaux min.**, sf exception ou mot daté et signé) pour la prochaine fois :

Se tester C__.__ : ex.n° : … / … / … / … | **Chap.n°__**

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Activ. n°__ : Quest.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Cours n°__ : Exempl.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Rayez les lignes inutiles. ***Si un cours n'est pas validé***, ***NE PAS FAIRE de travail au-delà.(vous ne serez PAS pénalisé)***

*Date **d'aujourd'hui** : ....*

Nom, **prénom** et classe :

…..

* Je veux **repasser** les **interrogations** :

C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__

* **Travail personnel** (**4 travaux min.**, sf exception ou mot daté et signé) pour la prochaine fois :

Se tester C__.__ : ex.n° : … / … / … / … | **Chap.n°__**

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Activ. n°__ : Quest.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Cours n°__ : Exempl.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Rayez les lignes inutiles. ***Si un cours n'est pas validé***, ***NE PAS FAIRE de travail au-delà.(vous ne serez PAS pénalisé)***

*Date **d'aujourd'hui** : ....*

Nom, **prénom** et classe :

…..

* Je veux **repasser** les **interrogations** :

C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__

* **Travail personnel** (**4 travaux min.**, sf exception ou mot daté et signé) pour la prochaine fois :

Se tester C__.__ : ex.n° : … / … / … / … | **Chap.n°__**

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Activ. n°__ : Quest.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Cours n°__ : Exempl.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Rayez les lignes inutiles. ***Si un cours n'est pas validé***, ***NE PAS FAIRE de travail au-delà.(vous ne serez PAS pénalisé)***

*Date **d'aujourd'hui** : ....*

Nom, **prénom** et classe :

…..

* Je veux **repasser** les **interrogations** :

C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__

* **Travail personnel** (**4 travaux min.**, sf exception ou mot daté et signé) pour la prochaine fois :

Se tester C__.__ : ex.n° : … / … / … / … | **Chap.n°__**

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Activ. n°__ : Quest.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Cours n°__ : Exempl.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Rayez les lignes inutiles. ***Si un cours n'est pas validé***, ***NE PAS FAIRE de travail au-delà.(vous ne serez PAS pénalisé)***

*Date **d'aujourd'hui** : ....*

Nom, **prénom** et classe :

…..

* Je veux **repasser** les **interrogations** :

C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__

* **Travail personnel** (**4 travaux min.**, sf exception ou mot daté et signé) pour la prochaine fois :

Se tester C__.__ : ex.n° : … / … / … / … | **Chap.n°__**

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Activ. n°__ : Quest.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Cours n°__ : Exempl.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Rayez les lignes inutiles. ***Si un cours n'est pas validé***, ***NE PAS FAIRE de travail au-delà.(vous ne serez PAS pénalisé)***

*Date **d'aujourd'hui** : ....*

Nom, **prénom** et classe :

…..

* Je veux **repasser** les **interrogations** :

C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__ ;C__.__

* **Travail personnel** (**4 travaux min.**, sf exception ou mot daté et signé) pour la prochaine fois :

Se tester C__.__ : ex.n° : … / … / … / … | **Chap.n°__**

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Exercices n° : … / … / … / … / … / … | **Chap**.n°__

Activ. n°__ : Quest.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Cours n°__ : Exempl.n° : … / … / … / … | **Chap**.n°__

Exercice 1 **4 points**

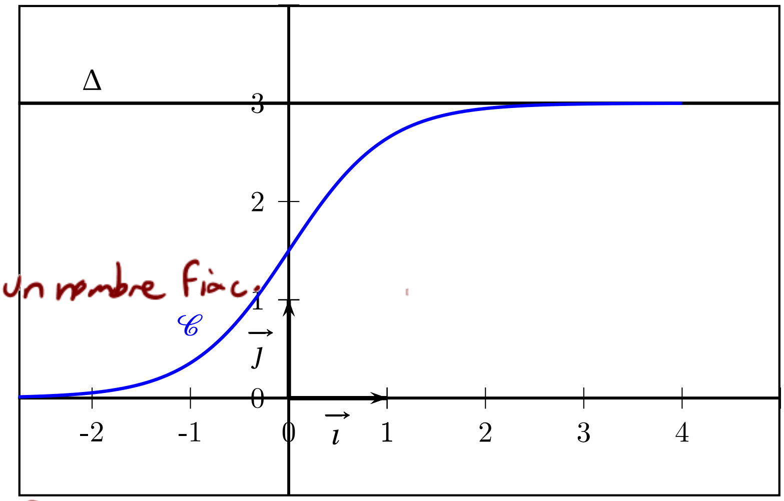
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



• Asymptote horiz : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) =$ un nombre fini.

• Asymptote verticale passant par a : $\lim\limits_{x\to a^{\mp}} f(x) = \pm\infty$.

dérivée : $\dfrac{\overbrace{6e^{-2x}}^{>0}}{\underbrace{(1+e^{-2x})^2}_{>0}}$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. → $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. → Bij.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. $4 < \alpha < 4{,}01$.

Partie B

$f(x) < 3 \Rightarrow -f(x) \dots$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

$[\ln(u(x))]' = \dots$

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan défini par

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ f(x) & \leqslant y & \leqslant 3 \end{array}\right.$$

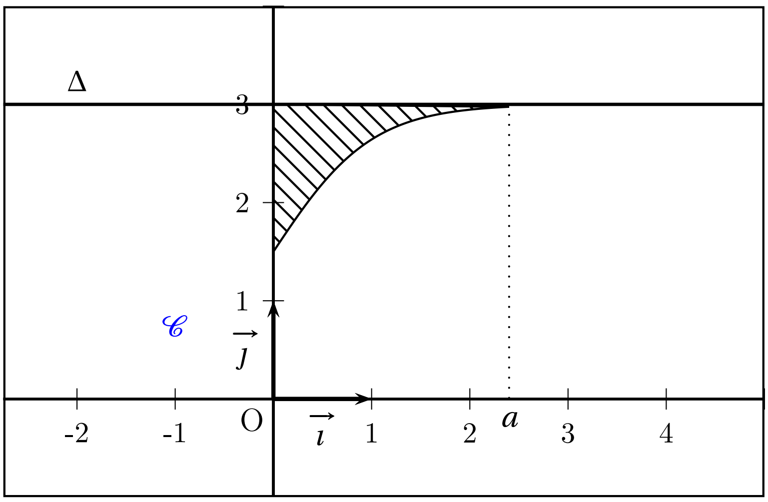
Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A



1. On sait que $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ quel que soit le réel x, donc $1+\mathrm{e}^{-2x} > 1 > 0$. Le dénominateur étant non nul, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle la fonction étant de la forme $\dfrac{3}{u(x)}$, avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-2x}$, donc $u'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ on a :
$f'(x) = -\dfrac{3u'(x)}{(u(x))^2} = -\dfrac{3\times(-2)\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2} = \dfrac{6\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2} > 0$ car quotient de deux nombres supérieurs à zéro. la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme le laisse supposer le graphique).
2. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et en posant $X = -2x$, $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, d'où
$\displaystyle\lim_{X\to-\infty} 1+\mathrm{e}^X = 1$ et enfin par quotient de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$: ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
3. Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante de $f(0) = \dfrac{3}{1+1} = 1,5$ à 3 : il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2,999$.
La calculatrice donne :
$f(4) \approx 2,99899$ et $f(5) \approx 2,9999$, donc $4 < \alpha < 5$;
$f(4,0) \approx 2,99899$ et $f(4,1) \approx 2,9992$, donc $4,0 < \alpha < 4,1$;
$f(4,00) \approx 2,99899$ et $f(4,01) \approx 2,99901$, donc $4,00 < \alpha < 4,01$ (encadrement à 10^{-2} près).

Partie B

1. On a vu dans la partie A que $0 < f(x) < 3 \iff -f(x) < 0 < 3-f(x)$, soit $h(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$H'(x) = -\dfrac{3}{2}\times\dfrac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3-3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = 3-f(x) =$
Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. a. On a vu que sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[0\,;\,a]$ (avec $a>$), la fonction h est positive, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$ est égale en unités d'aire à la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de h, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$.

Mais comme $h(x)=3-f(x)$, cette surface est la surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$ (voir l'aire hachurée ci-dessus.

b. D'après la question **B. 2.**, on a :

$\displaystyle\int_0^a h(x)\mathrm{d}x=[H(x)]_0^a=H(a)-H(0)=-\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right)+\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times 0}\right)=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right)=\frac{3}{2}\ln$

c. D'après la question précédente, on sait que l'aire de $\mathscr{D}_a$, surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$ est égale à $\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x}=0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}1+\mathrm{e}^{-2x}=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right)=2$, donc finalement par composition, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right)=\frac{3}{2}\ln 2\approx 1,04$ (u. a.)